

Кртинић Ђорђе



МАТЕМАТИЧКА

АНАЛИЗА 1

збирка решених задатака

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Математички факултет у Београду

МАТЕМАТИЧКА
АНАЛИЗА 1

збирка решених задатака

Друго издање

БЕОГРАД
2024.

Аутор: *Ђорђе Кртинић*, Математички факултет, Београд

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА 1

Збирка решених задатака

Рецензенти: *Зоран Каделбург*, Математички факултет, Београд
Иван Аранђеловић, Машински факултет, Београд

Издавач: Математички факултет, Београд

Обрада текста: *аутор*

Корице: *Александра Гулан*

ISBN: 978-86-7589-190-1

CIP - Каталогизација у публикацији

Народна библиотека Србије, Београд

517.51/.52(075.8)(076) 517.3(075.8)(076)

КРТИНИЋ, Ђорђе, 1976-

Математичка анализа 1 : збирка решених задатака / Ђорђе Кртинић. - 2. изд. - Београд : Математички факултет, 2024 (Београд : Donat Graf). - IV, 191 стр. : граф. прикази, табеле ; 24 cm

Тираж 500.

ISBN 978-86-7589-190-1

а) Теорија функција - Задаци б) Теорија низова и редова
- Задаци в) Интегрални - Задаци

COBISS.SR-ID 152962057

Тираж: 500 примерака

Штампа: Donat Graf, Београд

Садржај

Садржај	i
Предговор	iii
1. Увод	1
2. Низови	14
3. Одређивање граничних вредности	28
4. Непрекидност	35
5. Диференцијабилност	50
6. Испитивање функција	73
7. Технике интегралења елементарних функција	114
8. Интеграли	141
9. Редови	161

ГРЧКИ АЛФАБЕТ

Α	α	алфа	Ν	ν	ни
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гама	Ο	$\omicron$	омикрон
Δ	δ	делта	Π	π	пи
Ε	ϵ	епсilon	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	зета	Σ	σ	сигма
Η	η	ета	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	јота	Φ	ϕ	фи
Κ	κ	капа	Χ	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	ми	Ω	ω	омега

Предговор

Збирка је намењена студентима прве године Математичког факултета који прате предмет Анализа 1, али верујем да се може користити и шире. Већина задатака који се налазе у њој су изабрани са испита одржаних у оквиру предмета Анализа 1, Анализа 1А и Анализа 1Б у претходних 20 година, тако да заслуга око оригиналности задатака припада свим људима који су учествовали у припреми ових испита. Наравно, зарад потпуности материје, додата је неколицина задатака који нису били на испитима. Такође, да би се избегло понављање сличних задатака, као и да не би дошло до превеликог обима књиге, направљен је избор задатака, који је углавном до укуса аутора, а делом је на тај избор утицало то који се задаци чешће појављују по испитима (па је на тим местима свесно направљен избор сличних задатака). Треба напоменути и да је, иако је била предвиђена, изостављена материја везана за метричке просторе, будући да је у међувремену ова област постала саставни део испита друге године Математичког факултета.

Искористио бих прилику да се искрено захвалим свим горе поменутих људима. Како је у овом периоду у организацији ових испита учествовао троцифрен број људи, бесмислено је и покушавати поменути их све. Ипак, искористио бих прилику да издвојим своје драге професоре Драгољуба Аранђеловића и Јована Вукмировића, који су оставили огроман печат не само на формирање мог математичког укуса (тако да се у горе поменутом избору налази велики број задатака којима су аутори или они или њихови ученици), него и на данашњи изглед испита из предмета у којима се проучава или користи математичка анализа. Надам се да ће ова књига бар донекле достићи стандарде који су они поставили. Издвојио бих и професора Зорана Каделбурга, коме се и посебно захваљујем, јер је низом корисних сугестија прилично допринео повећању квалитета књиге.

Што се припреме за излазак у штампу тиче, специјалну врсту захвалности заслужили су поједини чланови издавачког одбора Математичког факултета у Београду, који су јасно изграђеним и смисленим правилима која се на исти начин примењују према свима, као и давањем предности математици науштрб формализма, показали колика је оправданост постојања једног таквог одбора, поготово у тренутном саставу (Милош Арсеновић, Олга Атанацковић, Мирјана Ђорић, Предраг Јаничић, Зоран Петровић).

Београд, март 2017. године

аутор

Ђорђе Кртинић

Предговор другог издања

У другом издању исправљене су грешке уочене у првом издању, док се, по питању садржаја, рукопис не разликује пуно од првог издања. Искористио бих прилику да се захвалим свима који су ми указали на пропусте који су направљени у првом издању.

Београд, јун 2024. године

аутор

Ђорђе Кртинић

1. УВОД

1. Израчунати $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arcsin} \frac{1}{3}\right)$.

Решење. Ако је $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\sin a = x$, онда је $\operatorname{tg} a = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Како је $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\sin(\operatorname{arcsin} x) = x$ за $|x| \leq 1$ и $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ за $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $x+y \neq \frac{\pi}{2}$, следи да је $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\sin\left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsin} \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, па је

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arcsin} \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{27 + 20\sqrt{2}}{71}.$$

2. Доказати да, ако је $x, y \in [-1, 1]$ и, притом, $xy \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$, важи

$$\operatorname{arcsin} x - \operatorname{arcsin} y = \operatorname{arcsin}\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right).$$

Решење. Мора бити $x, y \in [-1, 1]$. Ако је $\alpha = \operatorname{arcsin} x$ и $\beta = \operatorname{arcsin} y$, следи $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ и $\cos \beta = \sqrt{1-y^2}$ (јер је слика функције $\operatorname{arcsin} x$ једнака $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а $\cos x$ је ненегативна на том интервалу), па је

$$\sin(\alpha - \beta) = x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

Ако је $|\alpha - \beta| \leq \frac{\pi}{2}$, следи и тврђење задатка. Међутим, ако је $xy \geq 0$, ово је тривијално (онда и α и β припадају интервалу дужине $\frac{\pi}{2}$). Иначе, нека је без умањења општости $\beta < 0 \leq \alpha$, онда је $\alpha - \beta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2} - \alpha \geq -\beta > 0$, па како је $\sin t$ монотono растућа на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, последње је еквивалентно са $\cos \alpha \geq \sin(-\beta) \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} \geq -y > 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y < 0 < x)$. Будући да је случај $x^2 + y^2 \leq 1$, $x < 0 < y$ аналоган, следи тврђење задатка.

3. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са

(а) $a_1 = 6$, $a_2 = 14$, $a_3 = 36$, $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$. Доказати да је $a_n = 1 + 2^n + 3^n$ за свако $n \geq 1$.

(б) $a_1 = 1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. Доказати да је $a_n = n^3$ за свако $n \geq 1$.

Решење. (а) Важи $6 = a_1 = 1 + 2 + 3$, $14 = a_2 = 1 + 2^2 + 3^2$, $36 = a_3 = 1 + 2^3 + 3^3$ (база индукције). Ако је тврђење тачно за a_n, a_{n+1}, a_{n+2} , следи

$a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n = 6 \cdot (1 + 2^{n+2} + 3^{n+2}) - 11 \cdot (1 + 2^{n+1} + 3^{n+1}) + 6 \cdot (1 + 2^n + 3^n) = 1 \cdot (6 - 11 + 6) + 2^n \cdot (6 \cdot 4 - 11 \cdot 2 + 6) + 3^n \cdot (6 \cdot 9 - 11 \cdot 3 + 6) = 1 + 2^{n+3} + 3^{n+3}$, тј. тврђење за a_{n+3} , па резултат следи математичком индукцијом.

(б) Важи $1 = a_1 = 1^3$, $8 = a_2 = 2^3$, $27 = a_3 = 3^3$ (база индукције). Ако је тврђење тачно за a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , следи $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 3 \cdot (n+2)^3 - 3 \cdot (n+1)^3 + n^3 = (n+3)^3$, тј. тврђење за a_{n+3} , па резултат следи математичком индукцијом.

4. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 + ax + b = 0$ и p полином са целим бројним коефицијентима, доказати да је $p(x_1) + p(x_2)$ цео број.

Решење. По Виетовим правилима, важи $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 x_2 = b$. Како је $p(x) = (x^2 + ax + b)q(x) + cx + d$ и важи $c, d \in \mathbb{Z}$, следи $p(x_1) + p(x_2) = c(x_1 + x_2) + 2d = -ac + 2d \in \mathbb{Z}$.

5. Доказати да је $\cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$ рационалан број за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Нека је $a_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$ за $n \in \mathbb{N}_0$. Следи $a_0 = 3$,

$$\begin{aligned} A = a_1 &= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} + \cos^2 \frac{5\pi}{7} \\ &= \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{6\pi}{7}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{10\pi}{7}}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \sin \frac{2\pi}{7}} \cdot \left(\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{12\pi}{7} - \sin \frac{8\pi}{7} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\sin \frac{12\pi}{7}}{4 \sin \frac{2\pi}{7}} = \frac{5}{4}, \\ B &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (A^2 - a_2) = -\frac{1}{2} \\ C &= \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{8 \sin \frac{\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{4 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{8 \sin \frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}, \end{aligned}$$

па је $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$, и $a_{n+3} = Aa_{n+2} - Ba_{n+1} + Ca_n$, па како су $A, B, C \in \mathbb{Q}$, индукцијом следи $a_n \in \mathbb{Q}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

6. За $x > -1, n \in \mathbb{N}$ важи $(1+x)^n \geq 1+nx$, при чему једнакост важи ако и само ако је $n = 1$ или $x = 0$ (Бернулијева неједнакост). Доказати.

Решење. За $n = 1$ важи $(1+x)^1 = 1+1 \cdot x$. Ако је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$, како је $1+x \geq 0$, следи $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x$ и, притом, последња неједнакост је једнакост ако и само ако је $x = 0$, па тврђење следи индукцијом.

7. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $x, y \in \mathbb{C}$. Доказати да је

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \dots + \binom{n}{n}x^0y^n,$$

где је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (биномна формула).

Решење. Ако је $n = 1$, тврђење гласи $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1 = x+y$ и тачно је. Ако је тврђење тачно за неко n , следи

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} x^{n-j+1} y^j + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k, \end{aligned}$$

тј. тврђење за $n+1$, па тврђење следи индукцијом.

8. Нека је $k \in \mathbb{N}_0$ и $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$.

(а) Доказати да је $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$;

(б) Доказати да је $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(в) Доказати да је $S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$;

(г) Доказати да је $S_k(n)$ полином по n , степена $k+1$.

Решење. (а) За $n = 1$ важи $1^1 = S_1(1) = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Ако је тврђење тачно за n , следи $S_1(n+1) = S_1(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, тј. тврђење за $n+1$, па је тврђење доказано индукцијом.

(б) За $n = 1$ важи $1^2 = S_2(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Ако је тврђење тачно за n , следи $S_2(n+1) = S_2(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, тј. тврђење за $n+1$, па је тврђење доказано индукцијом.

(в) За $n = 1$ важи $1^3 = S_3(1) = \left[\frac{1 \cdot 2}{2}\right]^2$. Ако је тврђење тачно за n , следи $S_3(n+1) = S_3(n) + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{4}\right]^2$, тј. тврђење за $n+1$, па је тврђење доказано индукцијом.

(г) По биномној формули важи $(m+1)^{k+1} - m^{k+1} = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} m^i$, па се сабирањем претходних једнакости за $m \in \{1, \dots, n\}$ добија $(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} S_i(n)$, односно $S_k(n) = \frac{1}{k+1} \cdot \left[(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k+1}{i} S_i(n) \right]$. Ако је тврђење тачно за све бројеве не веће од k , сума у претходној загради је полином степена не већег од k , односно десна страна је полином степена $k+1$, па тврђење следи индукцијом.

9. За свако $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ (Муаврова формула). Доказати.

Решење. За $n = 1$ тврђење гласи $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$ и тачно је. Ако је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$, онда је

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \\ &= (\cos \alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \sin n\alpha) + i(\cos \alpha \sin n\alpha + \sin \alpha \cos n\alpha) \\ &= \cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha, \end{aligned}$$

тј. тврђење за $n+1$, па тврђење следи индукцијом.

10. Нека је $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ и $x_n = a^n \sin n\alpha + b^n \sin n\beta + c^n \sin n\gamma$. Ако је $x_1 = x_2 = 0$ и $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, доказати да је $x_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Нека је $y_n = a^n \cos n\alpha + b^n \cos n\beta + c^n \cos n\gamma$ за $n \in \mathbb{N}_0$, $x_0 = 0$ и $z_n = y_n + ix_n$ за $n \in \mathbb{N}_0$. Индукцијом следи да низ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ задовољава рекурентну везу $z_{n+3} - Az_{n+2} + Bz_{n+1} - Cz_n = 0$, где су, по Виетовим правилима, $A = a(\cos \alpha + i \sin \alpha) + b(\cos \beta + i \sin \beta) + c(\cos \gamma + i \sin \gamma) \in \mathbb{R}$ (јер је имагинарни део броја A једнак $x_1 = 0$), $B = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{2} \cdot [(z_1 + z_2 + z_3)^2 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)] \in \mathbb{R}$ (јер је имагинарни део броја $(z_1 + z_2 + z_3)^2$ једнак 0 због $x_1 = 0$, а имагинарни део броја $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ је исто 0 због $x_2 = 0$), $C = z_1 z_2 z_3 = abc(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \gamma + i \sin \gamma) = abc(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma)) \in \mathbb{R}$ (јер је $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ и $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Дакле, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ задовољава горњу везу, сви коефицијенти те везе су реални, а важи и $z_0 = 3 \in \mathbb{R}$, а како је $x_1 = x_2 = 0$, следи и $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, па индукцијом следи да су сви чланови низа $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ реални.

11. Нека је $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција за коју постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Доказати да је f опадајућа.

Решење. Нека је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$. Из конвексности следи да за $x < y < z$ важи $f(y) = f\left(\frac{z-y}{z-x} \cdot x + \frac{y-x}{z-x} \cdot z\right) \leq \frac{z-y}{z-x} \cdot f(x) + \frac{y-x}{z-x} \cdot f(z)$. Ако $z \rightarrow \infty$ за фиксне x и y , следи $f(y) \leq 1 \cdot f(x) + 0 \cdot A$, тј. $f(y) \leq f(x)$. Како су x и y произвољни, следи тврђење задатка.

12. Ако је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) конвексна функција, $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ такви да је $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ и $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$, доказати да онда важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

(Јенсенова неједнакост). Уколико је функција конкавна, важи тврђење са супротним смером неједнакости.

Решење. Тврђење за $n = 1$ је тривијално, а за $n = 2$ је дефиниција конвексности. Нека је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ такви да је $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ и $x_1, \dots, x_{n+1} \in (a, b)$. Ако је неки од $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ једнак 0, тврђење се своди на тврђење за n , а ако није, онда је $\min\{x_n, x_{n+1}\} \leq \frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \leq \max\{x_n, x_{n+1}\}$, па је $\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \in (a, b)$ и важи

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= f\left(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\right) \\ &\leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + (\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1}\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

па тврђење следи индукцијом.

13. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \infty)$ и $\alpha \in [-\infty, \infty]$. Ако је

$$S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, & \text{за } \alpha = -\infty \\ \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, & \text{за } \alpha = \infty \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, & \text{за } \alpha = 0 \\ \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{иначе} \end{cases},$$

онда из $\alpha < \beta$ следи $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и једнакост се достиже ако и само ако је $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (неједнакост средина). Доказати.

Решење. Како је функција $\frac{1}{x}$ (строго) конкавна на $(0, \infty)$, на основу Јенсенове неједнакости (примењену на позитивне бројеве $x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$) следи $\ln \frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \geq \frac{\ln x_1^\alpha + \ln x_2^\alpha + \dots + \ln x_n^\alpha}{n} = \alpha \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, одакле је $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq S_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за $\alpha > 0$, тј. $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за $\alpha < 0$.

Ако је $-\infty < \alpha < 0 < \beta < \infty$, из претходног следи $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_0(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ако је $0 < \alpha < \beta$, како је функција $x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ конвексна, из Јенсенове неједнакости следи

$$\left(\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \frac{y_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + y_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \dots + y_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n},$$

па се сменом $y_k = x_k^\alpha$ за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ добија $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Сменом $z_k = \frac{1}{x_k}$ за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, из претходног се добија еквивалент за $\alpha < \beta < 0$.

Ако је $M = S_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$, следи (довољно је размотрити $\alpha > 0$) $\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{M^\alpha + M^\alpha + \dots + M^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = M$, тј. $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq S_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ако је $m = S_{-\infty}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, следи (довољно је размотрити $\alpha < 0$) $\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq \left(\frac{m^\alpha + m^\alpha + \dots + m^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = m$, тј. $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq S_{-\infty}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

14. Нека је $p(x) = ax^4 - ax^3 + cx^2 - 16bx + b$ за неке $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $ab \neq 0$. Одредити све овакве полиноме којима су нуле позитивне.

Решење. Ако су нуле полинома x_1, x_2, x_3, x_4 , по Виетовим правилима је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = \frac{16b}{a}$, $x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{b}{a}$, па је $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 16$. По неједнакости између аритметичке и хармонијске средине важи $\frac{1}{4} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}} = \frac{1}{4}$, па се у овој неједнакости достиже једнакост, тј. мора бити $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{4}$, па су сви овакви полиноми $C\left(x - \frac{1}{4}\right)^4$, $C \neq 0$.

15. Ако су α, β, γ углови троугла, доказати да је:

- (а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1$;
- (б) ако троугао није правоугли, онда је $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$;
- (в) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$;
- (г) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Решење. Важи $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$, одакле, након сређивања, следи (а).

Слично, ако троугао није правоугли сви изрази који се јављају у даљем раду су дефинисани и важи $-\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, одакле, након сређивања, следи (б).

Како је $(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2})^2 + (\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2})^2 + (\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2})^2 \geq 0$, на основу дела (а) следи

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1.$$

Важи $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq 0$. На основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине и дела (а) следи

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} &= \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right) \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \\ &\leq \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{3} \right]^3 = \frac{1}{27}, \end{aligned}$$

одакле следи (г).

Једнакост (и у делу (в) и у делу (г)) се достиже ако и само ако је троугао једнакостраничан.

16. Ако су α, β, γ углови троугла, доказати да је:

$$(a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$(b) \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Решење. Како је $(\sin x)'' = -\sin x < 0$ за $x \in (0, \pi)$ и $(\ln \sin x)'' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ за $x \in (0, \pi)$, функције $\sin x$ и $\ln \sin x$ су конкавне на $(0, \pi)$. На основу Јенсенове неједнакости следи

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma &\leq 3 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ и} \\ \ln(\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) &= \ln \sin \alpha + \ln \sin \beta + \ln \sin \gamma \\ &\leq 3 \ln \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} = 3 \ln \sin \frac{\pi}{3} = 3 \ln \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ одакле је} \\ \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Како су горње функције и строго конвексне, следи да једнакост (у оба дела) важи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

17. Нека је $x, y > 0$ и $p, q > 1$ тако да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Онда је

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

(Јангова неједнакост). Доказати

Решење. Како је функција $\ln x$ конкавна на $(0, \infty)$, по Јенсеновој неједнакости следи $\lambda \ln x_1 + (1 - \lambda) \ln x_2 \leq \ln(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ за $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $\lambda \in [0, 1]$. Специјално, важи и за $x_1 = x^p$, $y_1 = y^p$ и $\lambda = \frac{1}{p}$, одакле следи

тражена неједнакост. Из строге конвексности, следи да једнакост важи ако и само ако је $x^p = y^q$.

18. Ако је $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in (0, \infty)$ $p, q > 1$ тако да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, доказати да важи

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

(Хелдерова неједнакост; специјално, за $p = q = 2$ ова неједнакост се често зове и неједнакост Коши–Шварц–Буњаковског).

Решење. Ако је $X = (x_1^p + \dots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \neq 0$, $Y = (y_1^q + \dots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \neq 0$ и $z_i = \frac{x_i}{X}$, $t_i = \frac{y_i}{Y}$ за $i \in \{1, \dots, n\}$, онда је $z_1^p + \dots + z_n^p = 1$ и $t_1^q + \dots + t_n^q = 1$. На основу Јангових неједнакости за $i \in \{1, \dots, n\}$, сабирањем следи $z_1 t_1 + \dots + z_n t_n \leq \frac{1}{p} \cdot (z_1^p + \dots + z_n^p) + \frac{1}{q} \cdot (t_1^q + \dots + t_n^q) = 1$, одакле непосредно следи тражена неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је $x_1^p : y_1^q = \dots = x_n^p : y_n^q$.

19. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, и $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ бијекција (дакле, пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$). Доказати да важи

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 b_{\pi(1)} + a_2 b_{\pi(2)} + \dots + a_n b_{\pi(n)} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

(лема о пермутацијама).

Решење. Ако је $i < j$ и $b_{\pi(i)} > b_{\pi(j)}$, следи $(a_i b_{\pi(i)} + a_j b_{\pi(j)}) - (a_i b_{\pi(j)} + a_j b_{\pi(i)}) = (a_i - a_j)(b_{\pi(i)} - b_{\pi(j)}) < 0$, одакле непосредно следи тврђење.

20. Нека је $n \in \mathbb{N}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Доказати да важи

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \text{ и}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n}$$

(неједнакост Чебишева).

Решење. Тврђење следи непосредно из леме о пермутацијама.

21. Нека $f : X \rightarrow Y$ и $A, B \subseteq X$.

(а) Доказати да је $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(б) Доказати да је $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Може ли важити строга инклузија?

Решење. (а) Важи $y \in f(A \cup B)$ ако и само ако је $y = f(x)$ за неко $x \in A \cup B$, односно ако и само ако је $y = f(x)$ за неко $x \in A$ или неко

$x \in B$, тј. ако и само ако је $y \in f(A)$ или $y \in f(B)$, што је еквивалентно са $y \in f(A) \cup f(B)$.

(б) Важи $y \in f(A \cap B)$ ако и само ако је $y = f(x)$ за неко $x \in A \cap B$, односно ако и само ако је $y = f(x)$ за неко x , такво да је $x \in A$ и $x \in B$.

Онда је $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$, па је $y \in f(A) \cap f(B)$.

Међутим, ако је $y \in f(A)$ и $y \in f(B)$, не мора бити $y \in f(A \cap B)$. На пример, ако је $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ дефинисана са $f(0) = 0$, $f(-1) = f(1) = 1$ и $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0\}$, онда је $A \cap B = \{0\}$, па је $f(A \cap B) = \{0\}$, док је $f(A) = \{0, 1\}$, $f(B) = \{0, 1\}$, па је $f(A) \cap f(B) = \{0, 1\}$, односно $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

22. Нека $f : X \rightarrow Y$ и $A, B \subseteq Y$.

(а) Доказати да је $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(б) Доказати да је $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(в) Доказати да је $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Решење. (а) Важи $x \in f^{-1}(A \cup B)$ ако и само ако је $f(x) \in A \cup B$, односно ако и само ако је $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$, тј. $x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B)$, што је еквивалентно са $y \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

(в) Важи $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$ ако и само ако је $f(x) \in Y \setminus A$, тј. ако и само ако $f(x) \in Y$ (што је тривијално за све $x \in X$) и $f(x) \notin A$ (тј. $x \notin f^{-1}(A)$), односно ако и само ако $x \in X \setminus f^{-1}(A)$.

(б) Овај део следи непосредно из (а), (в) и Де Морганових правила. Заиста:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= X \setminus (f^{-1}(Y \setminus (A \cap B))) = X \setminus (f^{-1}((Y \setminus A) \cup (Y \setminus B))) \\ &= (X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)) \cap (X \setminus f^{-1}(Y \setminus B)) \\ &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

23. Нека $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(а) Ако су f и g периодичне, мора ли $f + g$ бити периодична?

(б) Ако су f и g периодичне и имају исте основне периоде, мора ли $f + g$ бити периодична? Ако да, мора ли имати исти основни период? Мора ли имати основни период?

(в) Ако је f периодична за периодом m , а g периодична са периодом n , где су $m, n \in \mathbb{N}$, доказати да је $f + g$ периодична са периодом $NZS(m, n)$.

(г) Ако су m и n ($m, n \in \mathbb{N}$) основни периоди функција f и g , редом, мора ли $NZS(m, n)$ бити основни период функције $f + g$?

Решење. (а) Ако је $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \cos(\pi x)$, функције f и g су периодичне (f има период 2π , а период g је 2 ; ово су и основни периоди). Ако $f + g$ има период T , следи $(f + g)(0) = (f + g)(T)$, па је $2 = \cos 0 + \cos 0 = \cos T + \cos \pi T \leq 2$, па је $\cos T = \cos \pi T = 1$. Дакле, мора

бити $T = 2k\pi$ и $\pi T = 2l\pi$ за неке $k, l \in \mathbb{N}$, одакле је $\pi = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$, што је нетачно. Следи да $f + g$ нема период.

(б) Ако је T неки период функција f и g , онда за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, па је T период и функције $f + g$.

Нека су $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функције дефинисане са

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Оне имају основне периоде 1. Функција $f + h$ има основни период $\frac{1}{2} < 1$. Функција $f(x) + g(x)$ нема основни период (њен период је произвољан ненула рационалан број).

(в) Периоди f су и km , где је $k \in \mathbb{N}$, а периоди g су и ln , где је $l \in \mathbb{N}$. Ако је $S = NZS(m, n)$, онда је $S = am$ и $S = bn$ за неке $a, b \in \mathbb{N}$, па је $(f + g)(x + S) = f(x + S) + g(x + S) = f(x + am) + g(x + bn) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, тј. S је период функције $f + g$.

(г) Нека је

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } x \in \{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\} \\ -2, & \text{за } x = -4\frac{1}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in \{\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}\} \\ 2, & \text{за } x = 2\frac{1}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Онда је f периодична са основним периодом 5, g је периодична са основним периодом 3, важи $NZS(5, 3) = 15$, међутим 15 није основни период функције $f + g$. Из следеће таблице се види да је функција $f + g$ периодична са периодом $\frac{15}{2}$ (вредности функција $f, g, f + g$ у тачкама интервала $[0, 15]$ које нису дате у таблици су 0).

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6	$\frac{13}{2}$	7
f	0	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	-2	0	-1	0	-1	-1
g	0	1	1	1	0	2	0	1	1	1	0	2	0	1	1
$f + g$	0	0	1	0	-1	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0
x	$\frac{15}{2}$	8	$\frac{17}{2}$	9	$\frac{19}{2}$	10	$\frac{21}{2}$	11	$\frac{23}{2}$	12	$\frac{25}{2}$	13	$\frac{27}{2}$	14	$\frac{29}{2}$
f	-1	0	-1	0	-2	0	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	0	-2
g	1	0	2	0	1	1	1	0	2	0	1	1	1	0	2
$f + g$	0	0	1	0	-1	1	0	0	1	-1	0	1	0	0	0

24. Одредити инфимум и супремум скупа

$$S = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Решење. Како за $n \in \mathbb{N}$ важи $(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = (-1)^n \left[\frac{2n+3}{n} - \frac{1}{2n} \right] = (-1)^n \left[2 + \frac{5}{2n} \right]$ и како $\frac{5}{2n} \rightarrow 0$ монотono, следи да чланови претходног низа који одговарају непарном n чине растући низ који тежи ка -2 кад $n \rightarrow \infty$, а чланови низа који одговарају парним n чине опадајући низ који тежи ка 2 ($-2 < 2$). Следи да су сви чланови већи од првог, а мањи од другог члана овог низа, па је $\inf S = -\frac{9}{2}$, а $\sup S = \frac{13}{4}$.

25. Нека је $S = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(а) Наћи $\sup S$ и $\inf S$.

(б) Испитати постојање $\max S$ и $\min S$.

Решење. За $n = 1$ је $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} = m + 1 + \frac{2}{m} \rightarrow \infty$ кад $m \rightarrow \infty$, па је $\sup S = \infty$, а $\max S$ не постоји.

Како је $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} > \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}} = 2$ и како за $m = n$ важи $\frac{m}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{2}{m} \rightarrow 2$ кад $m \rightarrow \infty$, следи да је $\inf S = 2$. Због строге неједнакости у претходној неједнакости, следи да не постоји $\min S$.

26. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}$ непразан скуп и $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничене функције. Доказати да важи

$$(а) \left| \sup_{x \in X} f(x) - \sup_{x \in X} g(x) \right| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|;$$

$$(б) \left| \inf_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} g(x) \right| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Решење. Како је $f(x) - g(x) \leq |f(x) - g(x)|$, следи

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} f(x) &= \sup_{x \in X} ((f(x) - g(x)) + g(x)) \leq \sup_{x \in X} (f(x) - g(x)) + \sup_{x \in X} g(x) \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in X} g(x), \end{aligned}$$

па како је $\sup_{x \in X} g(x) < \infty$, следи $\sup_{x \in X} f(x) - \sup_{x \in X} g(x) \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$.

Аналогно је $\sup_{x \in X} g(x) - \sup_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$, па следи (а).

Како је $\sup_{x \in X} (-f(x)) = -\inf_{x \in X} f(x)$ и $\sup_{x \in X} (-g(x)) = -\inf_{x \in X} g(x)$, применом дела (а) на функције $-f(x)$ и $-g(x)$ следи део (б).

27. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}$ непразан скуп и $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ограничене функције, такве да за свако $x, y \in X$ важи $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$. Доказати да је

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} g(x) - \inf_{x \in X} g(x).$$

Решење. По услову задатка је

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &\leq |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| \\ &= \max\{g(x), g(y)\} - \min\{g(x), g(y)\} \leq \sup_{x \in X} g(x) - \inf_{x \in X} g(x), \text{ па је} \\ \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) &= \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in X\} \leq \sup_{x \in X} g(x) - \inf_{x \in X} g(x). \end{aligned}$$

28. Нека су $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ подскупови скупа X и нека је $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n =$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \text{ и } \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \text{ Доказати да важи:}$$

$$(a) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

$$(b) X \setminus \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n) \text{ и } X \setminus \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n)};$$

$$(v) \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right) \text{ и}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)} = \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \cup \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n} \right);$$

$$(r) \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \text{ и}$$

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)} \subseteq \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) \cap \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n} \right).$$

Да ли се у овом делу може десити да важе строге инклузије?

Решење. (a) Ако $x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, следи да x припада $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ за бар једно

n , односно постоји n_0 , тако да $x \in A_n$ за све $n \geq n_0$ („припада свим члановима низа почев од неког”).

Ако $x \in \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$, следи да x припада $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ за свако n , па за свако n_0 постоји $k \geq n_0$ тако да $x \in A_k$, тј. $|\{k \mid x \in A_k\}| = \infty$ („члан је бесконачно много чланова низа”). Следи $\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}$, док су преостале две инклузије у овом делу тривијалне.

(b) На основу Де Морганових правила је $X \setminus \left(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} \right) = X \setminus$

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k) \right) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n).$$

Аналогно се добија друга једнакост овог дела.

(v) Важи $x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$ ако и само ако x припада свим $A_n \cap B_n$

таквим да је $n \geq n_0$, а то је еквивалентно са тиме да за $n \geq n_0$ важи $x \in A_n$ и $x \in B_n$, односно са $x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $x \in \varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n$, тј. са $x \in$

$\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \cap \left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} B_n \right)$. Аналогно се добија друга једнакост овог дела.

(г) Ако $x \in \varinjlim_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \varinjlim_{n \rightarrow \infty} B_n$, следи да постоји n_0 , тако да x припада свим A_k за $k \geq n_0$ или x припада свим B_k за $k \geq n_0$. У сваком случају, следи да x припада свим $A_k \cup B_k$ за $k \geq n_0$, па $x \in \varinjlim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n)$.

Ако $x \in \varprojlim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n)$, је x члан бесконачно много скупова $A_k \cap B_k$, па је члан бесконачно много A_k и бесконачно много B_k , односно припада и $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} B_n$, па $x \in (\varprojlim_{n \rightarrow \infty} A_n) \cap (\varprojlim_{n \rightarrow \infty} B_n)$.

Ако је $x, y \in X$, $x \neq y$, $A_n = \begin{cases} \{x\}, & \text{за } 2 \mid n \\ \{y\}, & \text{иначе} \end{cases}$, $B_n = \begin{cases} \{y\}, & \text{за } 2 \mid n \\ \{x\}, & \text{иначе} \end{cases}$, следи $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$, $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x, y\}$, $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} B_n = \emptyset$, $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} B_n = \{x, y\}$. Како је $A_n \cap B_n = \emptyset$ и $A_n \cup B_n = \{x, y\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, следи $\varinjlim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \{x, y\}$ и $\varprojlim_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) = \emptyset$, па овај пример показује да у обе везе овог дела инклузија може бити строга.

2. НИЗОВИ

1. Испитати конвергенцију и у случају конвергенције одредити граничну вредност низа $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисаног са $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n^2 + 1}$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

Решење. Ако је $a_0 = 0$, онда је $a_n = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ (индукција), па дати низ конвергира и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Ако је $a_0 > 0$, индукцијом се лако показује да је $a_n > 0$. Такође је $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2} = 1 - \frac{(1-a_n)^2}{1+a_n^2} \leq 1$ за $n \geq 0$. Из $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_n^3}{1+a_n^2} = \frac{a_n}{1+a_n^2} (1 - a_n^2)$ и претходно показаног (тј. да су, сем можда a_0 , сви чланови датог низа у $[0, 1]$), следи да је дати низ (почев од a_1) неопадајући. Како је он и ограничен одозго, постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и за њега важи $a = \frac{2a}{1+a^2}$ (што се добија преласком на граничну вредност у датој рекурентној вези, користећи непрекидност функције $x \rightarrow \frac{2x}{1+x^2}$). Решење дате једначине је $a \in \{-1, 0, 1\}$. Како је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ неопадајући низ бројева из интервала $(0, 1]$, мора бити $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Ако је $a_0 < 0$, нека је $b_n = -a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Онда је $b_0 > 0$ и $b_{n+1} = \frac{2b_n}{1+b_n^2}$ за $n \geq 0$, па по претходном следи $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

2. Испитати конвергенцију и у случају конвергенције одредити граничну вредност низа $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисаног са $a_1 \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 1}$ за $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Нека је $b_{n+1} = 2b_n$, $c_{n+1} = b_n + c_n$ за $n \in \mathbb{N}$, $b_1 = a_1$, $c_1 = 1$. Дати низови су, очигледно, добро дефинисани и низ $(c_n)_{n \geq 1}$ је низ позитивних бројева. Тада је добро дефинисан низ $\left(\frac{b_n}{c_n}\right)_{n \geq 1}$ и важи $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Елиминацијом се из горњег система рекурентних једначина добија $c_{n+2} - 3c_{n+1} + 2c_n = 0$, одакле је $c_n = A + B \cdot 2^n$, $b_n = B \cdot 2^n$. Уврштавањем почетних услова, добија се $c_n = (1 - a_1) + a_1 \cdot 2^{n-1}$, $b_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$, тј. $a_n = \frac{a_1 \cdot 2^{n-1}}{(1 - a_1) + a_1 \cdot 2^{n-1}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако је $a_1 = 0$, онда је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ константно једнак нули, па постоји његова гранична вредност и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ако је $a_1 \neq 0$, за $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}}, \text{ па постоји гранична вредност низа } (a_n)_{n \geq 1} \text{ и важи}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1-b_1}{b_1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}}} = 1.$$

3. Нека је $a > 0$. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a}{2 + a_n}$. Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n \geq 1}$. У случају конвергенције, одредити његову граничну вредност.

Решење. Нека је $b_{n+1} = ac_n$, $c_{n+1} = 2b_n + c_n$ за $n \in \mathbb{N}$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$. Дати низови су, очигледно, добро дефинисани и низ $(c_n)_{n \geq 1}$ је низ позитивних бројева. Следи да је добро дефинисан низ $(\frac{b_n}{c_n})_{n \geq 1}$ и важи $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Елиминацијом се из горњег система рекурентних једначина добија $c_{n+2} - 2c_{n+1} - ac_n = 0$, одакле је $c_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, $b_n = aA \cdot \alpha^{n-1} + aB \cdot \beta^{n-1}$, где је $\alpha = 1 - \sqrt{1+a}$ и $\beta = 1 + \sqrt{1+a}$. Како је $b_1 = 0$, низ се може додефинисати са $c_0 = 0$, тако да задовољава претходне услове. Уврштавањем почетних услова, добија се $A + B = c_0 = 0$, $A\alpha + B\beta = c_1 = 1$, одакле следи да је $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Следи да је $a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{aA \cdot \alpha^{n-1} + aB \cdot \beta^{n-1}}{A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n} = \frac{\frac{a}{\beta} + \frac{aA \cdot \alpha^{n-1}}{B \cdot \beta^n}}{1 + \frac{A \cdot \alpha^n}{B \cdot \beta^n}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $|\alpha| < |\beta|$ и како за $|q| < 1$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, следи да $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ постоји и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{\beta} = \frac{a}{1 + \sqrt{1+a}} = \sqrt{1+a} - 1$.

4. Нека је $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = \frac{2018}{2017}$ и $x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$ за $n \geq 0$. Испитати постојање $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. У случају постојања, наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Решење. Ако је $x_n = \frac{2018-n}{2017-n}$, онда је

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{2018-n}{2017-n}} = \frac{2017-n}{2 \cdot (2017-n) - (2018-n)} = \frac{2018-(n+1)}{2017-(n+1)},$$

па како је и $x_0 = \frac{2018-0}{2017-0}$, следи да је $x_n = \frac{2018-n}{2017-n}$ за $n \leq 2016$, а важи и $x_{2016} = 2$, па x_{2017} није дефинисан. Како низ $(x_n)_{n \geq 0}$ није добро дефинисан, не може се говорити ни о $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (не постоји).

5. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$. Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 0}$. У случају конвергенције, наћи му граничну вредност.

Решење. Ако је дати низ конвергентан и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ се добија $l = 2l - l^2$, одакле је $l \in \{0, 1\}$. Такође је $x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n)$ (*).

(1) Ако је $a < 0$, из (*) индукцијом следи да је низ опадајући. Ако би био и ограничен одоздо, конвергирао би. Међутим, опадајући низ негативних бројева не може конвергирати ни ка 0, ни ка 1, па у овом случају низ дивергира ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

(2) Ако је $a > 2$, онда је $x_1 < 0$, па важе исти закључци као у (1).

- (3) Ако је $a = 0$, низ је константно једнак 0, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
- (4) Ако је $a = 1$ низ је константно једнак 1, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.
- (5) Ако је $a \in (0, 1)$, из $x_{n+1} = 1 - (1 - x_n)^2$ индукцијом следи да се сваки члан датог низа налази у $(0, 1)$, а из (*) следи да је низ растући. Дакле, он конвергира, па како растући низ позитивних бројева не може конвергирати ка 0, следи да је у овом случају $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.
- (6) Ако је $1 < a < 2$, онда је $0 < x_1 < 1$, па важе исти закључци као у (5).

6. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{2a_n + 1}$ за $n \geq 1$. Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n \geq 0}$. Уколико постоји, одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решење. Важи $a_0 > 1$. Како је $a_{n+1} - 1 = \frac{2a_n(a_n - 1)}{2a_n + 1}$, индукцијом следи да је $a_n > 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{1 - a_n}{2a_n + 1}$, следи да је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ опадајући, па како је и ограничен, он је и конвергентан. Ако је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, пуштањем граничне вредности у вези којом је дефинисан низ следи $a = \frac{2a^2 + 1}{2a + 1}$, па је $a = 1$.

7. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = 5x_n - 4 - x_n^2$ за $n \geq 1$.

- (а) Доказати да низ $(x_n)_{n \geq 1}$ конвергира ако и само ако је $a \in [2, 3]$.
- (б) Одредити тачке нагомилавања низа $(y_n)_{n \geq 1}$ дефинисаног са $y_n = x_n \sin \frac{n\pi}{3}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. (а) Како је $x_{n+1} - x_n = 4x_n - 4 - x_n^2 = -(x_n - 2)^2 \leq 0$, уочени низ је нерастући. Ако би постојао $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, пуштањем граничне вредности у везу којом је дефинисан низ следи $x = 5x - 4 - x^2$, тј. $x = 2$.

- (1) Ако је $a < 2$, како је низ нерастући, следи да су сви чланови низа мањи од 2, па из претходног следи да не постоји гранична вредност у $\mathbb{R}$ (важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).
- (2) Ако је $a > 3$, следи $x_1 = 2 - (a - 2)(a - 3) < 2$, следи да су сви чланови низа сем првог мањи од 2, па из претходног следи да не постоји гранична вредност у $\mathbb{R}$ (важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).
- (3) Ако је $x_n \in [2, 3]$, следи $0 \leq x_n - 2 \leq 1$ и $0 \leq 3 - x_n \leq 1$, па је $x_{n+1} = 2 + (x_n - 2)(3 - x_n) \in [2, 3]$. Ако је $x_0 = a \in [2, 3]$, индукцијом следи да су сви чланови низа у овом интервалу, па како је низ

и монотон, следи да је конвергентан, тј. у овом случају важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

(б) По (а) низ $(x_n)_{n \geq 1}$ има једну тачку нагомилавања, $-\infty$ ако је $a \notin [2, 3]$, а 2 ако је $a \in [2, 3]$. Како низ $(\sin \frac{n\pi}{3})_{n \geq 1}$ има тачке нагомилавања $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$, следи да низ $(y_n)_{n \geq 1}$ има тачке нагомилавања $-\infty, 0, \infty$ ако је $a \notin [2, 3]$, односно $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ ако је $a \in [2, 3]$.

8. Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисаног са $x_0 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot x_n^2 + \frac{2}{3x_n}$ за $n \geq 0$.

Решење. Ако је $x_n \geq 3$, следи $x_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot x_n^2 + \frac{2}{3x_n} > \frac{1}{3} \cdot x_n^2 \geq \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3$, па како је $x_0 \geq 3$, индукцијом следи да је $x_n \geq 3$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Како је $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3} \cdot x_n^2 + \frac{2}{3x_n} - x_n = \frac{1}{3x_n} \cdot (x_n^3 - 3x_n^2 + 2) = \frac{1}{3x_n} \cdot (x_n - 1)(x_n - 1 - \sqrt{3})(x_n - 1 + \sqrt{3}) > 0$, јер је $x_n \geq 3$, па следи да је низ растући. Ако низ конвергира и $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, следи $x = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3x} \Leftrightarrow x \in \{1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}\}$, што је немогуће, јер је $x \geq 3$. Како је низ растући, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

9. Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисаног са $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n^{x_n}$.

Решење. Индукцијом следи да су сви чланови датог низа добро дефинисани и позитивни. Како је $x_0 \in (0, 1]$ и $a^b < 1$ за $a \in (0, 1)$ и $b > 0$, индукцијом следи да је $x_n \in (0, 1)$ за свако $n \geq 0$.

Нека је $f(t) = t^t - t$. Како је $f'(t) = t^t(\ln t + 1) - 1$ и $f''(t) = t^t(\ln t + 1)^2 + t^{t-1}$, следи да је $f''(t) \geq 0$ на $(0, 1]$, па је (како је $f'(1) = 0$ и f' расте) $f'(t) \leq 0$ за $t \in (0, 1]$. Слично, како је $f(1) = 0$ и f опада, важи $f(t) \geq 0$ за $t \in (0, 1]$.

Следи да је $x_{n+1} - x_n = f(x_n) \geq 0$ за $n \geq 0$, тј. дати низ је растући и ограничен одозго, па конвергира. Ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ, добија се $x^x = x$, тј. $f(x) = 0$ (и, наравно, $x \in (0, 1]$), односно $x = 1$.

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

10. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$ за $n \geq 1$.

(а) Доказати да низ $(x_n)_{n \geq 1}$ конвергира.

(б) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^3}$.

Решење. (а) Нека је $f(x) = x - \sin x$. Онда је $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, па је функција f неоппадајућа на $[0, \pi]$. Како је $f(0) = 0$, следи да важи $f(x) \geq 0$ за $x \in [0, \pi]$.

Важи $x_1 \in (0, \pi)$. Ако је $x_n \in (0, \pi)$, по претходном следи $x_{n+1} = f(x_n) \geq 0$ и $x_{n+1} - x_n = -\sin x_n \leq 0$. Индукцијом следи да је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ нерастући и ограничен одоздо, па конвергира.

Ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, из рекурентне везе за дати низ и непрекидности функције f , следи $x = f(x)$, тј. $\sin x = 0$, односно $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Како је $(x_n)_{n \geq 1}$ низ нерастућих бројева у интервалу $(0, \pi)$, мора бити $x = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(б) Из (а) следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, па важи $x_{n+1} = x_n - \sin x_n = x_n - \left(x_n - \frac{x_n^3}{6} + o(x_n^3)\right) = \frac{x_n^3}{6} + o(x_n^3)$ кад $n \rightarrow \infty$. Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_n^3}{6} + o(x_n^3)}{x_n^3} = \frac{1}{6}$.

11. Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисаног са $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.

Решење. Индукцијом следи да важи $x_n > 0$, па следи и добра дефинисаност датог низа. Даље, важи $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} < \frac{1}{1+0} = 1$ за $n \in \mathbb{N}$, па следи $x_n < 1$ за $n \in \mathbb{N}$. Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in [0, 1]$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \in [0, 1]$.

Из особина доње и горње граничне вредности, следи $a = \frac{1}{1+b}$ и $b = \frac{1}{1+a}$. Решавањем се добија $a+ab = 1 \wedge b+ab = 1$, одакле је $a = b \wedge a^2 + a - 1 = 0$, тј. $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, па како је $a \in [0, 1]$, следи $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = b$. Како су доња и горња гранична вредност једнаке, постоји и гранична вредност датог низа и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

12. Нека је $(a_n)_{n \geq 1}$ низ позитивних бројева са својством:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N}) a_{n+k} < a_n + \varepsilon.$$

Да ли низ $(a_n)_{n \geq 1}$ мора конвергирати?

Решење. Дати низ је ограничен. Заиста, за $\varepsilon = 1$ постоји n_0 , тако да је $a_{n_0+1+k} < a_{n_0+1} + 1$ за свако $k \in \mathbb{N}$, па су сви чланови низа мањи од $\min\{a_{n_0+1} + 1, \max\{a_n \mid 1 \leq n \leq n_0 + 1\}\}$ (низ је тривијално ограничен одоздо нулом).

Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\varepsilon > 0$. Тада постоји n_0 за дато ε са својством из задатка. Како је a најмања тачка нагомилавања датог низа, постоји $n_1 > n_0$, тако да је $|a - a_{n_1}| < \varepsilon$ и за свако $n > n_1$ важи $a - \varepsilon < a_n$. Следи да за све $k \in \mathbb{N}$ важи $a_{n_1+k} < a_{n_1} + \varepsilon < a + 2\varepsilon$ и $a_{n_1+k} > a - \varepsilon$. Дакле, сви чланови низа $(a_n)_{n \geq n_1}$ се налазе у интервалу $(a - 2\varepsilon, a + 2\varepsilon)$. Како је ε произвољно, следи да дати низ конвергира.

13. Ако је низ реалних бројева $(x_n)_{n \geq 1}$ дивергентан, доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \ln |x_{n+1} - x_n| \right) \geq 0.$$

Решење. Претпоставимо супротно, да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \ln |x_{n+1} - x_n| \right) < 0$. Онда постоји $\delta > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $\frac{1}{n} \cdot \ln |x_{n+1} - x_n| < -\delta$ за $n \geq n_0$,

па за такве n важи $|x_{n+1} - x_n| \leq e^{-\delta n} = q^n$, где је $q = e^{-\delta} \in (0, 1)$. Ако је $m > n \geq n_1 \geq n_0$, следи $|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q} \leq \frac{q^{n_1}}{1-q}$, па како $\frac{q^{n_1}}{1-q} \rightarrow 0$ кад $n_1 \rightarrow \infty$, следи да је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ Кошијев у $\mathbb{R}$, па је и конвергентан. Следи тврђење задатка.

14. Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисаног са

$$x_n = \frac{\cos 1!}{2^1} + \dots + \frac{\cos n!}{2^n}.$$

Решење. Ако је $m > n \geq n_0$, следи $|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n}^m \frac{\cos k!}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n}^m \frac{|\cos k!|}{2^k} \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_0-1}}$, па како $\frac{1}{2^{n_0-1}} \rightarrow 0$ кад $n_0 \rightarrow \infty$, следи да је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ Кошијев у $\mathbb{R}$, па конвергира.

15. Нека је $(x_n)_{n \geq 1}$ низ реалних бројева. Мора ли конвергирати овај низ ако:

- (а) конвергирају његови поднизови $(x_{2n})_{n \geq 1}$ и $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$?
- (б) конвергирају његови поднизови $(x_{pn})_{n \geq 1}$ за сваки прост број p ?
- (в) конвергирају његови поднизови $(x_{2n})_{n \geq 1}$, $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ и $(x_{3n})_{n \geq 1}$?

Решење. Низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_{2n} = 0$ и $x_{2n-1} = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$ има својство да конвергирају његови поднизови $(x_{2n})_{n \geq 1}$ и $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ (ка 0 и 1, редом), а није конвергентан (има две тачке нагомилавања), па је одговор на питање дела (а) негативан.

Низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_n = 1$ ако је n прост број и $x_n = 0$ ако је n сложен број има својство да конвергирају његови поднизови $(x_{np})_{n \geq 1}$ (чланови сваког таквог подниза су почев од другог члана једнаки 0), а сам низ не конвергира (простих бројева има бесконачно много), па је одговор на питање дела (б) негативан.

Поднизови $(x_{2n})_{n \geq 1}$, $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ садрже све чланове низа. Ако су конвергентни, овај низ може имати највише две тачке нагомилавања. Нека $x_{2n} \rightarrow a$, а $x_{2n-1} \rightarrow b$ кад $n \rightarrow \infty$. Како је и $(x_{3n})_{n \geq 1}$ конвергентан, ако је $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n}$, како је $(x_{6n})_{n \geq 1}$ подниз и низа $(x_{2n})_{n \geq 1}$ и низа $(x_{3n})_{n \geq 1}$ и како је подниз конвергентног низа и сам конвергентан и конвергира ка истој граничној вредности, следи $a = c$. Аналогно, $(x_{6n+3})_{n \geq 1}$ је подниз и низа $(x_{2n-1})_{n \geq 1}$ и низа $(x_{3n})_{n \geq 1}$, па као и малопре се закључује да је $b = c$. Следи $a = b$, тј. полазни низ има једну тачку нагомилавања, па је конвергентан, тј. одговор на питање дела (в) позитиван.

16. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_1 = -1$, $x_{n+1} = e^{x_n} - 1$ за $n \in \mathbb{N}$.

- (а) Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 1}$. (б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Решење. (а) Индукцијом се показује да је дати низ ограничен одозго нулом: $x_1 = -1 < 1$, ако $x_n < 0$, следи $x_{n+1} = e^{x_n} - 1 \leq e^0 - 1 = 0$.

Пошто је $e^x \geq 1 + x$, следи $x_{n+1} = e^{x_n} - 1 \geq x_n$, па је дати низ и неоппадајући. Следи, низ $(x_n)_{n \geq 1}$ је конвергентан. Нека је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Преласком на граничну вредност у датој рекурентној вези добија се $x = e^x - 1$, па како једнакост у $e^x \geq 1 + x$ важи ако и само ако $x = 0$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{(б) Како је } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - e^{x_n} + 1}{x_n(e^{x_n} - 1)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{како, по (а), низ } (x_n)_{n \geq 1} \\ \text{тежи ка нули} \end{array} \right\} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - (1 + x_n + \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)) + 1}{x_n(1 + x_n + o(x_n) - 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)}{x_n^2 + o(x_n^2)} = -\frac{1}{2}, \text{ следи} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= -2. \end{aligned}$$

Напомена. Нека $(x_n)_{n \geq 1}$ низ реалних бројева, а $(y_n)_{n \geq 1}$ растући низ позитивних реалних бројева и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$. Онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Претходно тврђење се назива *Штолцова теорема*, а често се тако назива и њена последица, која тврди да под горе наведеним условима, ако још постоји и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, онда постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$. Ова напомена се односи на сва појављивања Штолцове теореме у остатку текста.

17. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1}$ за $n \geq 1$.

(а) Испитати конвергенцију низа у зависности од a .

(б) Ако је $a \in (-1, 0)$, наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Решење. (а) Како је $x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1} \geq x_{n-1}$ за $n \geq 1$, дати низ је неоппадајући.

(1) Ако је $a \in \{-1, 0\}$ важи $x_n = 0$ за $n \geq 1$, па постоји гранична вредност датог низа и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(2) Ако је $a \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ важи $x_1 > 0$, тј. дати низ је неоппадајући низ позитивних бројева. Ако конвергира, његова гранична вредност (l) је већа од нуле и задовољава (пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ) $l = l^2 + l$, тј. $l = 0$, што је немогуће. Дакле, за ове вредности a низ дивергира.

- (3) Ако је $a \in (-1, 0)$ из $x_n \in (-1, 0)$ следи $x_n \in (-1, 0)$, јер $(x^2 + x)(0, 1) = [-\frac{1}{4}, 0) \subseteq (-1, 0)$, па је дати низ и ограничен. Следи да конвергира, па ако је $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ следи $l = l^2 + l$, тј. $l = 0$.

(б) Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ } (n)_{n \geq 1} \\ \text{монотонно расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-x_n^2}{x_n^2 \cdot (x_n + 1)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x_n} = -1, \end{aligned}$$

следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = -1$.

18. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2}$ за $n \geq 1$.

- (а) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n}$. (б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n$.

Решење. Индукцијом се добија да су сви чланови низа $(a_n)_{n \geq 1}$ позитивни (одавде следи и добра дефинисаност). Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3a_n^2} > 0$, низ $(a_n)_{n \geq 1}$ расте. Ако би постојао коначан $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, преласком на граничну вредност у $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3a_n^2}$ се добија $a = a + \frac{1}{3a^2}$, тј. $\frac{1}{3a^2} = 0$, што је немогуће. Дакле $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

- (а) Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^3}{n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^3 - a_n^3}{n+1 - n} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{3a_n^3} + \frac{1}{27a_n^6} = \left\{ \text{како је } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \right\} = 1.$
 (б) Како $\frac{1}{3a_n^3} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ и по (а) следи

$$\begin{aligned} n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) &= n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{3a_n^3} \right) = n \cdot \left(\frac{1}{3a_n^3} + o \left(\frac{1}{3a_n^3} \right) \right) \\ &= \frac{n}{3a_n^3} + o \left(\frac{n}{3a_n^3} \right) = \frac{1}{3} + o(1), \end{aligned}$$

па из непрекидности функције $x \rightarrow e^x$ следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + o(1)} = \sqrt[3]{e}.$$

19. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = a > 0$, $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1$.

- (а) Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. (б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n$.

Решење. (а) Индукцијом следи да је $x_n > 0$ за $n \geq 0$, тј. ограниченост одоздо. Из Бернулијеве неједнакости следи $x_{n+1} = \sqrt[4]{1 + 4x_n} - 1 \leq$

$1 + \frac{1}{4} \cdot 4x_n - 1 = x_n$ за $n \geq 0$, па је дати низ нерастући. Следи да је дати низ конвергентан. Нека је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Како је рекурентна веза састављена од непрекидних функција, следи $x = \sqrt[4]{1+4x} - 1 \Leftrightarrow (1+x)^4 = 1+4x \Leftrightarrow x^2(6+4x+x^2) = 0$. Како је $x^2+4x+6 > 0$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = 0$.

(б) По (а) важи $x_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па следи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - ((1+4x_n)^{\frac{1}{4}} - 1)}{x_n \cdot ((1+4x_n)^{\frac{1}{4}} - 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - (x_n - \frac{3}{2} \cdot x_n^2 + o(x_n^2))}{x_n \cdot (x_n + o(x_n))} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \frac{2}{3}$ (функција $x \rightarrow \frac{1}{x}$ је непрекидна на $(0, \infty)$).

20. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 = a \in (-\pi, \pi)$, $a_{n+1} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n}$ за $n \geq 0$.

(а) Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n \geq 0}$.

(б) За $a > 0$ наћи константу $c \in \mathbb{R}$, тако да важи $a_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$ кад $n \rightarrow \infty$.

Решење. Нека је $g(x) = x - \sin x$. Како је $g(0) = 0$, $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ за $x \in \mathbb{R}$ и $g'(x) > 0$ на $(0, 2\pi)$, следи да је $\sin x < x$ за $x > 0$.

Нека је $a > 0$. Онда индукцијом следи да је дати низ добро дефинисан и позитиван. Следи да је $a_{n+1} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n} < \frac{a_n^2}{a_n} = a_n$, па је дати низ нерастући и ограничен одоздо (нулом). Следи да конвергира, па, ако је $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, пуштањем граничне вредности у везу из задатка, добија се $l = \frac{\sin^2 l}{l}$, па како је $l \geq 0$, следи $l \in [0, 1]$, тј. $l = \sin l$, па по горе показаном, мора бити $l = 0$.

Ако је $a = 0$, низ није добро дефинисан. Ако је $a < 0$, низ $(b_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $b_n = -a_n$ за $n \geq 0$ по горе доказаном задовољава $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Како је (за $a > 0$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема низ } (n)_{n \geq 1} \\ \text{монотонно расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4 - \sin^4 a_n}{a_n^2 \sin^4 a_n}$ и како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, следи да је
 $\sin a_n = a_n - \frac{a_n^3}{6} + o(a_n^3)$ кад $n \rightarrow \infty$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4 - (a_n^4 - \frac{2}{3} \cdot a_n^6 + o(a_n^6))}{a_n^6 + o(a_n^6)} = \frac{2}{3}.$$

Дакле, важи $a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ кад $n \rightarrow \infty$, тј. $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

21. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = 3$, $x_{n+1} = x_n - \sin^4 x_n$. Одредити константе a , b и c , тако да важи $x_n \sim a + bn^c$ кад $n \rightarrow \infty$.

Решење. Низ је нерастући. Како је $x_{n+1} = x_n - \sin^4 x_n \geq x_n - \sin x_n \geq 0$ (јер за $x > 0$ важи $\sin x < x$), дати низ је и ограничен одоздо, тј. следи да конвергира. Пуштањем граничне вредности у релацију којом је низ дефинисан, добија се $\sin^4 a = 0$, где је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Следи да је $\sin a = 0$, па како је $a \in [0, 3]$, следи да је $a = 0$ (то је и тражено a из задатка).

Следи да је $c < 0$ (ако постоји). Нека је $\gamma > 0$. Како $x_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је $\sin x_n = x_n + o(x_n)$ кад $n \rightarrow \infty$, па је $\sin^4 x_n = x_n^4 + o(x_n^4)$ кад $n \rightarrow \infty$, одакле је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\gamma}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\gamma - x_{n+1}^\gamma}{x_n^\gamma x_{n+1}^\gamma} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\gamma \cdot [1 - (1 - x_n^3 + o(x_n^3))^\gamma]}{x_n^{2\gamma} + o(x_n^{2\gamma})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\gamma [1 - (1 - \gamma x_n^3 + o(x_n^3))]}{x_n^{2\gamma} + o(x_n^{2\gamma})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma x_n^{\gamma+3} + o(x_n^{\gamma+3})}{x_n^{2\gamma} + o(x_n^{2\gamma})}. \end{aligned}$$

Последња гранична вредност је коначан број, различит од нуле, ако и само ако је $2\gamma = \gamma + 3$, односно ако и само ако је $\gamma = 3$ и тада је она једнака 3, тј. $b = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $c = -\frac{1}{3}$.

22. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_1 \in (-1, 1)$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{1-x_n}} - 1$.

(а) Ако је $x_1 \in (-1, 0)$ наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(б) Ако је $x_1 \in (-1, 0)$ наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

(в) Ако је $x_1 \in (0, 1)$ наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Решење. Из позитивности корена следи да је $x_{n+1} > -1$, ако x_n постоји. Такође, низ је растући ако x_{n+1} постоји, јер је $x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x_n}{1-x_n}} \geq 1+x_n \Leftrightarrow \frac{1+x_n}{1-x_n} \geq (1+x_n)^2 \Leftrightarrow (1+x_n)x_n^2 \geq 0$ (уочене трансформације су исправне уколико је $x_n \in [-1, 1)$, за $n \geq 1$; међутим, ако није тако, низ $(x_n)_{n \geq 1}$ није дефинисан).

(а) У овом случају низ је ограничен одозго (доказ индукцијом: по претпоставци, важи $x_1 < 0$; ако је $x_n \in (-1, 0)$, следи $x_{n+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x_n}{1-x_n} < 0 \Leftrightarrow x_n \in (-1, 0)$). Дакле, низ $(x_n)_{n \geq 1}$ је у овом случају монотон

растући и ограничен одозго, па је конвергентан. Ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, из рекурентне везе и непрекидности функције $x \rightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ на свом домену следи $x = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1$, тј. $(1+x)x^2 = 0$, па је $x \in \{-1, 0\}$. Како је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ неопадајући низ бројева већих од -1 , не може бити $x = -1$. Дакле $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(б) Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ } (n)_{n \geq 1} \\ \text{строго расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - \sqrt{\frac{1+x_n}{1-x_n}} + 1}{x_n \cdot (\sqrt{\frac{1+x_n}{1-x_n}} - 1)}$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (из (а))
 и $\lim_{t \rightarrow 0-} \frac{t - (1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} + 1}{t((1+t)^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} - 1)} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1+t-(1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2))(1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o(t^2))}{t((1+\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}t^2+o(t^2))(1+\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2+o(t^2))-1)} =$
 $\lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = -\frac{1}{2}$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx_n} = -\frac{1}{2}$ (ако нешто важи на неком скупу, важи и на његовом подскупу). Коначно, како је функција $x \rightarrow \frac{1}{x}$ непрекидна, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = -2$.

(в) Нека постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$. Као у (а) следи $x \in \{0, -1\}$. Међутим, како низ $(x_n)_{n \geq 1}$ расте и позитиван је, претходне вредности нису могуће, па мора бити $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Пошто из $x_n > 1$ следи да није дефинисан x_{n+1} , и претходно је немогуће. Дакле, тражена гранична вредност не постоји за $x_1 \in (0, 1)$ (тада дати низ није добро дефинисан).

23. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}.$$

Доказати да важи $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^3}\right)$ кад $n \rightarrow \infty$, као и да дати низ монотонно тежи ка нули.

Решење. Како $\frac{k}{n^3} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ за $1 \leq k \leq n$, следи

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+k}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{k}{n^3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(1 - \frac{k}{2n^3} + o\left(\frac{k}{2n^3}\right)\right)$$

кад $n \rightarrow \infty$ за $1 \leq k \leq n$. Како је $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, следи

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(n - \frac{n(n+1)}{4n^3} + o\left(\frac{n(n+1)}{4n^3}\right)\right) = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot (n + o(1)) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

кад $n \rightarrow \infty$, што је прво тврђење задатка.

Из претходне релације непосредно следи и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Како је

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \text{ за } 1 \leq k \leq n, \text{ следи } \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, па монотоност датог низа следи из $a_{n+1} < a_n \Leftarrow$

$$\frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^3+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^3+n}} \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} < (n+1) + \frac{1}{(n+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{(n+1)^2}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

24. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и $a_n = f(n) + f(-n)$ за $n \geq 0$. Доказати:

(а) Низ $(a_n)_{n \geq 0}$ је монотон.

(б) Низ $(a_n)_{n \geq 0}$ је конвергентан ако и само ако је $f(x) = \alpha x + \beta$ за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Решење. Нека $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Онда је функција $\varphi_a: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинисана са $\varphi_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ неоппадајућа ако и само ако је функција f конвексна. Такође, функција f је линеарна ако и само ако је функција φ константна.

(а) Из услова задатка следи $a_{n+1} - a_n = f(n+1) + f(-n-1) - f(n) - f(-n) = \frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n} - \frac{f(-n)-f(-n-1)}{(-n)-(-n-1)} = \varphi_n(n+1) - \varphi_{-n}(-n-1) \geq 0$, јер је $\varphi_{-n}(-n-1) \leq \varphi_{-n}(n)$ (из неопadaња функције φ_{-n}), $\varphi_{-n}(n) = \varphi_n(-n)$ и $\varphi_n(-n) \leq \varphi_n(n+1)$ (из неопadaња функције φ_n).

(б) Ако је $f(x) = \alpha x + \beta$ за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, онда је $a_n = 2\beta$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па низ $(a_n)_{n \geq 1}$ конвергира.

Обрнуто, нека низ $(a_n)_{n \geq 1}$ конвергира. Онда је он и ограничен. Ако f није линеарна, φ_0 није константна, па постоје $x > y$, тако да је $\varphi_0(x) > \varphi_0(y)$. Онда за $n \in \mathbb{N}$ и $n > |x|, |y|$ важи $\varphi_0(n) > \varphi_0(x) > \varphi_0(y) > \varphi_0(-n)$, па $0 < \varphi_0(n) - \varphi_0(-n) = \frac{f(n)-f(0)}{n} - \frac{f(0)-f(-n)}{n} = \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, јер је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ ограничен. Следи $0 < 0$, што је контрадикција. Овим је доказано тврђење задатка.

25. Нека је реалан низ $(x_n)_{n \geq 2}$ дефинисан са $x_2 > 0$, $x_{n+1} = -1 + \sqrt[n]{1+nx_n}$ за $n \geq 2$. Израчунати граничне вредности низова

(а) $(x_n)_{n \geq 2}$; (б) $(nx_n)_{n \geq 2}$; (в) $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_{n \geq 2}$.

Решење. (а) Индукцијом лако следи позитивност и добра дефинисаност датог низа. На основу Бернулијеве неједнакости, следи $1 + nx_n = (1 + x_{n+1})^n \geq 1 + nx_{n+1}$, тј. дати низ је нерастући, па је и конвергентан. Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, на основу биномне формуле и ненегативности броја x следи $1 + nx_n = (1 + x_{n+1})^n \geq (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2$, одакле је $0 \leq x^2 \leq \frac{2(x_n - x)}{n-1}$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) = \infty$, следи да је $x = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(б) Из Штолцове теореме, како је низ $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq 2}$ растући и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$

(по (а)), следи $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nx_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$. Из биномне

формуле следи $1 + nx_n = (1 + x_{n+1})^n \geq 1 + nx_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_{n+1}^2$ тј. $x_n - x_{n+1} \geq \frac{n-1}{2} \cdot x_{n+1}^2$. Следи $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nx_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{nx_n}{\frac{n(n-1)}{2} \cdot x_{n+1}}$, а како је

$\ln(1 + x_{n+1}) = \frac{\ln(1 + nx_n)}{n}$ за $n \geq 2$ (добива се из везе којом је дефинисан дати низ логаритмовањем, које је по (а) дозвољено) и $x \leq (1+x) \ln(1+x)$ за $x \geq 0$ (ако је $g(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$, тада је $g'(x) = \ln(1+x) > 0$ за $x > 0$ и $g(0) = 0$, одакле следи дата неједнакост) следи $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n \leq$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + nx_n) \ln(1 + nx_n)}{\frac{n(n-1)}{2} \cdot x_{n+1}} = 2 \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + nx_n}{n-1} \cdot \frac{1 + x_{n+1}}{x_n} \right) = 0$, јер по (а) важи

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x_{n+1})}{x_{n+1}} = 1$ (јер је $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$), односно

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \cdot x_n \right) = 0$. Следи $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} nx_n \leq 0$, тј. постоји тражена гранична вредност и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$.

(в) Из (а) и (б), како је $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, следи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{\ln(1 + x_{n+1})} \cdot \frac{\ln(1 + nx_n)}{nx_n} \right) = 1.$$

26. Нека је $\alpha > 1$, $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\alpha}$.

(а) Представити x_{n+1} преко x_n .

(б) Одредити све α за које конвергира низ $(x_n)_{n \geq 1}$.

Решење. (а) Како је $x_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{k^\alpha} + \frac{x_n}{n^\alpha} = x_n + \frac{x_n}{n^\alpha}$, следи

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

(б) Из (а) и $x_1 > 0$, следи да су сви чланови низа $(x_n)_{n \geq 1}$ позитивни, па како је $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) > x_n$, следи да је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ растући. Из (а) следи и да важи $x_n = x_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^\alpha} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{(n-1)^\alpha} \right)$. Како за све

реалне x важи $1+x \leq e^x$, следи $x_n \leq x_1 \cdot e^{\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{(n-1)^\alpha}} < x_1 \cdot e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$, па

из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ за $\alpha > 1$ следи ограниченост низа $(x_n)_{n \geq 1}$.

Пошто је дати низ растући и ограничен, он је и конвергентан (за све $\alpha > 1$).

27. У зависности од $x_0 > -1$, испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисаног са $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n}}$ за $n \geq 0$ и у случају конвергенције одредити његову граничну вредност.

Решење. Сви чланови низа (сем евентуално x_0) су позитивни, низ је добро дефинисан. Нека је $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Како је $f(x) = x \Leftrightarrow x \cdot \sqrt{1+x} = 1$, па како су сва решења претходне једначине ненегативана, следи да су она решења једначине $x^3 + x^2 - 1 = 0$. Пошто је $(x^3 + x^2 - 1)' = 3x^2 + 2x \geq 0$ за $x \geq 0$ и пошто је $(x^3 + x^2 - 1)(0) = -1 < 0$ и $(x^3 + x^2 - 1)(1) = 1 > 0$, једначина $f(x) = x$ има једно решење, које се налази у $(0, 1)$ (нека је то α). Такође је $x_{n+1} = f(x_n)$ и $|f'(x)| = \left| \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{1}{2}$ за $x \geq 0$, па (по теореме о средњој вредности) важи $|x_{n+1} - \alpha| = |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(\xi_n)| \cdot |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \cdot |x_n - \alpha|$ за неко $\xi_n \in (\min\{x_n, \alpha\}, \max\{x_n, \alpha\})$ (ако је $x_0 = \alpha$, сваки члан низа је једнак α , па он конвергира). Индукцијом следи $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \cdot |x_1 - \alpha| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

Напомена. Тврђење се може добити и применом Банахове теореме о фиксној тачки. Заправо, у приказаном решењу је прикривена примена те теореме (чланови низа x_n , за $n \geq 1$, припадају затвореном интервалу $[0, 1]$, а како је $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, за $x \in [0, 1]$, следи да је f контракција (са коефицијентом $\frac{1}{2}$) на $[0, 1]$).

3. ОДРЕЂИВАЊЕ ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ

1. Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$.

Решење. Како је $\ln(1 + e^n) \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \left(\ln e^n + \ln\left(1 + \frac{1}{e^n}\right)\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim n \cdot \left(-\frac{2}{n+1}\right) = -\frac{2n}{n+1} \sim -2$ кад $n \rightarrow \infty$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + e^n) \cdot \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = -2$.

2. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n \right)$.

Решење. Како $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, па је

$$\begin{aligned} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{-1} &= n \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^{-1} = n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\right] \\ &= n \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^2} \cdot \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \text{ кад } n \rightarrow \infty, \text{ одакле је} \\ \frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n &= \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot n \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad - 2n = 2n + \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 2n = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ кад } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\text{односно } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sqrt[n]{e} + 1}{\sqrt[n]{e} - 1} - 2n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} + o(1) \right) = \frac{1}{6}.$$

3. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$.

Решење. Како је

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$, следи да за $n \rightarrow \infty$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) &= en^2 \cdot \left(1 - 1 - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n} + \frac{11}{24(n+1)^2} - \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= en^2 \cdot \left(\frac{1}{2n(n+1)} - \frac{11(2n+1)}{24n^2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{e}{2} \cdot \frac{n}{n+1} + o(1), \end{aligned}$$

па је $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = \frac{e}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{e}{2}$.

4. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 ({}^{n-1}\sqrt{e} - {}^{n+1}\sqrt{e})$.

Решење. Како за $n > 1$ важи $\frac{1}{n-1} > 0$ и $\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n})^{-1} = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n-1}} &= 1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 \right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Како за $n \geq 1$ важи $\frac{1}{n+1} > 0$ и $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot (1 + \frac{1}{n})^{-1} = \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{n+1}} &= 1 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^2 \right) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Следи $n^2 \cdot (e^{\frac{1}{n-1}} - e^{\frac{1}{n+1}}) = n^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = n^2 \cdot \left(\frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = 2 + o(1)$ кад $n \rightarrow \infty$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 ({}^{n-1}\sqrt{e} - {}^{n+1}\sqrt{e}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + o(1)) = 2$.

5. Одредити све $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2})$ коначан број различит од нуле.

Решење. Важи $n\sqrt{n}(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}) = n^2 \left[1 + a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + b \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = n^2 \cdot \left[1 + a \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + b \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right] = (1 + a + b)n^2 + \frac{a+2b}{2} \cdot n + \frac{-a-4b}{8} + o(1)$, па из услова задатка следи $1 + a + b = 0$, $\frac{a+2b}{2} = 0$, тј. $a = -2$, $b = 1$ и за те вредности параметра је $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-(-2)-4}{8} + o(1) \right) = -\frac{1}{4}$.

6. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + \dots + n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{n^7}$.

Решење. Применом биномне формуле, следи

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + \dots + n^2 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{n^7} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова низ теорема, низ} \\ (n^7)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)(n+2)(n+3)]^2}{(n+1)^7 - n^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \right]^2}{7n^6 + 21n^5 + \dots + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left(1 + \frac{3}{n}\right) \right]^2}{7 + \frac{21}{n} + \dots + \frac{1}{n^6}} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}$$

7. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n!) - 2 \ln(2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!)}{n^2 + n}$.

Решење. Како низ $(n^2 + n)_{n \geq 1}$ монотонно расте ка ∞ кад $n \rightarrow \infty$, применом Штолцове теореме следи да је

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n!) - 2 \ln(2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!)}{n^2 + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \ln((n+1)!) - 2 \ln(2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n! \cdot (n+1)!) - (n+1) \ln(n!) + 2 \ln(2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot n!)}{(n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \ln((n+1)!) - 2 \ln((n+1)!) - (n+1) \ln(n!)}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln((n+1)!) - (n+1) \ln(n!)}{2n+2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) + n \ln(n!) - (n+1) \ln(n!)}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln(n+1) - \ln(n!)}{2n+2} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (2n+2)_{n \geq 1} \text{ монотонно расте ка } \infty \end{array} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+2) - \ln((n+1)!) - (n \ln(n+1) - \ln(n!))}{2(n+1) + 2 - (2n+2)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+2) - \ln(n+1) - n \ln(n+1)}{2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\ln(n+2) - \ln(n+1))}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \cdot \left(\ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + o \left(\frac{1}{n+1} \right) \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

8. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Решење. Како низ $(n)_{n \geq 1}$ монотонно расте ка ∞ кад $n \rightarrow \infty$, применом Штолцове теореме следи да је

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \dots + \ln n - n \ln n}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln n}{1} = -n(\ln(n+1) - \ln n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} -n \ln \frac{n+1}{n} = -1,
\end{aligned}$$

јер је $n \ln \frac{n+1}{n} = n \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) = 1 + o(1)$ кад $n \rightarrow \infty$, па следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} =$

-1 , а како је $\ln x$ непрекидна на $(0, \infty)$, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

9. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

Решење. Функција $(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ је дефинисана на $(0, \frac{\pi}{2})$ (на овом интервалу важи $\operatorname{tg} x > 0$). Следи, дефинисан је и $\ln(\operatorname{tg} x)$. Следи да је

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} e^{\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}, \text{ због непрекидно-}$$

сти функције e^x . Како је $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} =$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \frac{\infty}{\infty}, \\ \ln(\operatorname{tg} x) \text{ и } \frac{1}{\cos x} \text{ су диференцијабилне} \\ \text{и важи } \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \neq 0 \text{ на } \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0, \text{ следи } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = e^0 = 1.$$

10. Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+2}+x}$.

Решење. Како је

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1}+x &= |x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x = -x \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + x \\ &= -\frac{1}{2x} + \left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{и } \sqrt{x^2+2}+x &= |x| \cdot \sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x \\ &= -x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + x = -\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{кад } x \rightarrow -\infty, \text{ следи да је } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

11. Израчунати $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+x^3}+x \right)$.

Решење. Кад $x \rightarrow -\infty$ важи $\left(\sqrt[4]{x^4+x^3}+x \right) = -x \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) = -x \left(1 + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{4} + o(1)$, па је $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[4]{x^4+x^3}+x \right) = -\frac{1}{4}$.

12. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}} \right)^x$.

Решење. Ако је $x > 1$, израз је добро дефинисан (важи $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}} > 0$), па је $x \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}} = x \cdot \left(\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right) = x \cdot \left(-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right) = -\frac{3}{2} + o(1)$ кад $x \rightarrow \infty$. Како је експоненцијална функција непрекидна, следи $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{3}{2} + o(1)} = e^{-\frac{3}{2}}$.

13. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)^{1 - \cos x} - 1}{(\ln(1 + x))^2}$.

Решење. Како је $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\ln(1 + x) = x + o(x)$ када $x \rightarrow 0$, следи $(\ln(1 + x))^2 = x^2 + o(x^2)$ и $(1 + \cos x)^{1 - \cos x} = e^{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$ кад $x \rightarrow 0$. Пошто је $\ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \ln\left(2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)\right) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) = \ln 2 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$ кад $x \rightarrow 0$, добија се $(1 + \cos x)^{1 - \cos x} = e^{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(\ln 2 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)} = e^{\frac{x^2}{2} \cdot \ln 2 + o(x^2)} = 1 + \frac{\ln 2}{2} \cdot x^2 + o(x^2)$. Дакле,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)^{1 - \cos x} - 1}{(\ln(1 + x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln 2}{2} \cdot x^2 + o(x^2) - 1}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\ln 2}{2}.$$

14. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p}$ у зависности од $p \in \mathbb{R}$.

Решење. Како $e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0+$ ако је $p \leq 0$, следи $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = 0$ (јер за $p < 0$ важи $x^p \rightarrow \infty$ кад $x \rightarrow 0+$, односно $x^0 \rightarrow 1$ кад $x \rightarrow 0+$). Ако је $p > 0$ и $r = \frac{1}{p}$, важи

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{rx}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{rx}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила } \frac{\infty}{\infty}, \\ (e^{\frac{1}{rx}})' = -\frac{1}{rx^2} \cdot e^{\frac{1}{rx}} < 0 \text{ за } x > 0 \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{rx^2} \cdot e^{\frac{1}{rx}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} r e^{-\frac{1}{rx}} = 0, \end{aligned}$$

па како је функција x^p непрекидна на $[0, \infty)$, следи $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{e^{-\frac{1}{rx}}}{x}\right)^p = \left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{rx}}}{x}\right)^p = 0$.

15. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + mx} \cdot \sqrt[n]{1 - nx} - 1}{x^2}$ за оне вредности $m, n \in \mathbb{N}$ за које дата гранична вредност постоји.

Решење. Како је

$$\begin{aligned} f_{m,n}(x) &= \frac{\sqrt[m]{1 + mx} \cdot \sqrt[n]{1 - nx} - 1}{x^2} = \frac{(1 + mx)^{\frac{1}{m}} \cdot (1 - nx)^{\frac{1}{n}} - 1}{x^2} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{m} \cdot (mx) + \frac{\frac{1}{m} \cdot (\frac{1}{m} - 1)}{2} \cdot (mx)^2 + o(x^2)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \cdot (-nx) + \frac{\frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{n} - 1)}{2} \cdot (-nx)^2 + o(x^2)\right) - 1}{x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1-m}{2} + \frac{1-n}{2} - 1\right) \cdot x^2 + o(x^2)}{x^2} = \left(\frac{-m-n}{2} + o(1)\right) \end{aligned}$$

слиди да дата гранична вредност постоји за све $m, n \in \mathbb{N}$ и важи

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{m,n}(x) = \frac{-m-n}{2}.$$

16. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

Решење. (а) Како је $\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} > 0$ за довољно велико x , слиди да је

$$\begin{aligned} x \ln \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) &= x \ln \left[\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + \left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right] \\ &= x \ln \left[1 + \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \right] \\ &= x \cdot \left[\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) + o\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \right] = 1 + o(1) \end{aligned}$$

кад $x \rightarrow \infty$, па је $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1+o(1)} = e$.

17. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \right)^x$.

Решење. Важи $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \geq 0$, па је израз добро дефинисан. Како $(1 + \frac{1}{t})^t \rightarrow e$ кад $t \rightarrow \infty$, за $t = \frac{x^2 + 4x + 2}{-2x - 1}$ слиди $\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \right)^{\frac{x^2 + 4x + 2}{-2x - 1}} \rightarrow e$ кад $x \rightarrow \infty$, па по непрекидности функције e^x слиди

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \right)^x &= \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \right)^{\frac{x^2 + 4x + 2}{-2x - 1}} \right]^{\frac{-2x - 1}{x^2 + 4x + 2} \cdot x} \\ &= \left[\left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 2} \right)^{\frac{x^2 + 4x + 2}{-2x - 1}} \right]^{\frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}} \rightarrow e^{-2} \text{ кад } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

18. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 - 2}{x^2 \operatorname{tg}^2 x}$.

Решење. Како је $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ кад $x \rightarrow 0$, слиди $\frac{1}{\cos x} = \left(1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) \right)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2 \right) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$ кад $x \rightarrow 0$.

Слиди $\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ кад $x \rightarrow 0$.

Дакле,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 - 2}{x^2 \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4) + \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right)^2 - 2}{x^2 (x + o(x))^2} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{60} + \frac{1}{36} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{8}{45} \cdot x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \end{aligned}$$

кад $x \rightarrow 0$, па је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x}{x} + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 2}{x^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{8}{45}$.

19. У зависности од $a, b \in \mathbb{R}$ одредити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \cdot \left(\sqrt{x(x+4)} \cdot e^{\frac{1}{x}} - ax - b \right) \right]$.

Решење. Кад $x \rightarrow \infty$ важи $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ и $\sqrt{x(x+4)} = |x| \cdot \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} \cdot \left(\frac{4}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 2 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Дакле, кад $x \rightarrow \infty$ важи $L = \left[x \cdot \left(\sqrt{x(x+4)} \cdot e^{\frac{1}{x}} - ax - b \right) \right]$

$$\begin{aligned} &= \left[x \cdot \left(x + 2 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - ax - b \right] \\ &= (1-a)x^2 + (3-b)x - \frac{1}{2} + o(1), \end{aligned}$$

$$\text{па је } L = \begin{cases} \infty, & \text{за } a < 1 \\ -\infty, & \text{за } a > 1 \\ \infty, & \text{за } a = 1 \text{ и } b < 3 \\ -\infty, & \text{за } a = 1 \text{ и } b > 3 \\ -\frac{1}{2}, & \text{за } a = 1 \text{ и } b = 3 \end{cases}.$$

20. Нека је $S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ израз дефинисан у задатку 13 дела 1. Израчунати:

- (а) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- (б) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- (в) $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Решење. Како за $\alpha \notin \{-\infty, 0, \infty\}$ важи

$$\begin{aligned} \ln S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\ln(x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha) - \ln n \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\ln\left(1 + \alpha \ln x_1 + o(\alpha) + \dots + 1 + \alpha \ln x_n + o(\alpha)\right) - \ln n \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\ln\left(1 + \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n} \cdot \alpha + o(\alpha)\right) \right] = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} + o(1) \end{aligned}$$

кад $\alpha \rightarrow 0$, следи $\lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ако је $M = \max\{x_1, \dots, x_n\}$, следи $\frac{M}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$, па како је $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{M}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = M = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M$, по лемии о два полицајца постоји гранична вредност из (б) и важи $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_\infty(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ако је $m = \min\{x_1, \dots, x_n\}$, следи $\frac{m}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq m$, па како је $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{m}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = m = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} m$, по лемии о два полицајца постоји гранична вредност из (в) и важи $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} S_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = S_{-\infty}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4. НЕПРЕКИДНОСТ

1. Нека је $\lambda > 0$ и $f(x) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \dots + \frac{1}{[x]^\lambda} - \frac{[x]}{x^\lambda}$ за $x \geq 1$. Испитати непрекидност функције f на интервалу $[1, \infty)$.

Решење. Функција f је на сваком интервалу $[n, n+1)$ за $n \in \mathbb{N}$ добро дефинисана и непрекидна (као композиција непрекидних функција), тј. непрекидна је сдесна (за свако $x \in [1, \infty)$ важи $\lim_{t \rightarrow x+} f(t) = f(x)$). Из истог разлога, функција је непрекидна на сваком од интервала $(n, n+1)$ за $n \in \mathbb{N}$.

Коначно, функција f је непрекидна и слева у целобројним тачкама, јер за $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ важи $f(n) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \dots + \frac{1}{n^\lambda} - \frac{n}{n^\lambda}$ и $\lim_{t \rightarrow n-} f(t) = \left(1 + \frac{1}{2^\lambda} + \dots + \frac{1}{(n-1)^\lambda} - \frac{n-1}{t^\lambda}\right) = 1 + \frac{1}{2^\lambda} + \dots + \frac{1}{(n-1)^\lambda} - \frac{n-1}{n^\lambda}$, тј. $f(n) = \lim_{t \rightarrow n-} f(t)$ за $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Дакле, функција f је непрекидна на $[1, \infty)$.

2. Нека су $a, m, n \in \mathbb{R}$, $n > 0$.

(а) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{x^2}$. (б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - 1}{\operatorname{tg} nx}$.

(в) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

(г) Наћи $\alpha, \beta > 0$, a и b , такве да је функција

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^3 \alpha(x+1)}{(x+1)^2}, & \text{за } x < -1 \\ a, & \text{за } x = -1 \\ \frac{e^{x+1} - 1}{\operatorname{tg} \beta(x+1)}, & \text{за } -1 < x < 0 \\ b, & \text{за } x = 0 \\ (\cos x)^{-\frac{2}{\sin^2 x}} - 1, & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење. (а) Како $ax \rightarrow 0$ и $\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, следи

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)^3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{3}{2} \cdot a^2 x^2 + o(x^2)\right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2} \cdot a^2 x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2} \cdot a^2. \end{aligned}$$

(б) За свако $n > 0$, ако је $|x| < \frac{\pi}{2n}$, $|x| \neq 0$, дати израз је дефинисан, па дата гранична вредност постоји. Како $mx \rightarrow 0$ и $nx \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, следи $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - 1}{\operatorname{tg} nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + mx + o(x) - 1}{nx + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m + o(1)}{n + o(1)} = \frac{m}{n}$.

(в) За $|x| < \frac{\pi}{2}, |x| \neq 0$ дати израз је дефинисан, а дефинисани су и логаритми који се јављају у даљем раду. Како је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{(x + o(x^2))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}$, следи $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{(x + o(x^2))^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(г) Из претходних резултата следи:

из (а), сменом $t = x + 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1 - \cos^3 \alpha(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1 - \cos^3 \alpha t}{t^2} = \frac{3}{2} \cdot \alpha^2;$$

из (б), како је $\beta > 0$, сменом $t = x + 1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{e^{x+1} - 1}{\operatorname{tg} \beta(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{\operatorname{tg} \beta t} = \frac{1}{\beta},$$

а такође је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{x+1} - 1}{\operatorname{tg} \beta(x+1)} = \frac{e-1}{\operatorname{tg} \beta}$, за $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

из (в), како је функција x^{-2} непрекидна за $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left((\cos x)^{-\frac{2}{\sin^2 x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left((\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \right)^{-2} - 1 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{\ln \cos x}{\sin^2 x}} \right)^{-2} - 1 = (e^{-\frac{1}{2}})^{-2} - 1 = e - 1. \end{aligned}$$

Следи $a = \frac{3}{2} \cdot \alpha^2$ и $a = \frac{1}{\beta}$ (непрекидност за $x = -1$), $b = \frac{e-1}{\operatorname{tg} \beta}$ и $b = e - 1$ (непрекидност за $x = 0$), па је $\operatorname{tg} \beta = 1$. Дакле, $\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, а како за свако $k > 0$ постоји тачка у којој функција $\operatorname{tg} \beta(x+1)$ на $(-1, 0)$ није дефинисана (јер је $\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi > \pi$, а функција $\operatorname{tg} x$ има прекид на сваком интервалу дужине веће од π), следи $\beta = \frac{\pi}{4}$. Следи $b = e - 1$, $a = \frac{4}{\pi}$, $\alpha = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}$ ($\alpha > 0$).

3. Испитати непрекидност функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане са

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{за } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{за } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Решење. Како су скупови $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ густе у $\mathbb{R}$, за свако $x \in \mathbb{R}$ постоје низови рационалних $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и ирационалних бројева $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$, тако да $r_n \rightarrow x$ и $i_n \rightarrow x$ кад $n \rightarrow \infty$, па ако је f непрекидна у x , следи $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(i_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n^2 = x^2$, па мора бити $x = x^2$, тј. $x \in \{0, 1\}$. Следи, ако је $x \notin \{0, 1\}$, f није непрекидна у x .

Ако је $x = 0$ и $x_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, за довољно велико n је $|x_n| < 1$, па је $0 \leq |f(x_n)| \leq |x_n| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, тј. f је непрекидна у 0. Ако је $x = 1$ и $x_n \rightarrow 1$ кад $n \rightarrow \infty$, за довољно велико n је $|1 + x_n| < 3$, па је $0 \leq |f(x_n) - f(1)| = |f(x_n) - 1| \leq 3|x_n - 1| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, тј. f је непрекидна у 1.

4. Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ непрекидне функције, тако да је $\inf_{0 \leq x \leq 1} f(x) = \inf_{0 \leq x \leq 1} g(x)$. Доказати да постоји $\xi \in [0, 1]$ тако да је $f(x) = g(x)$.

Решење. Функције f и g су непрекидне на компакту $[0, 1]$, па достижу свој минимум. Нека је једна од тачака у којој f достиже минимум a , а једна од тачака у којој g достиже минимум b и нека је, без умањења општости, $a \leq b$. Функција $f(x) - g(x)$ је непрекидна на повезаном скупу $[a, b]$ и важи $f(a) - g(a) \leq f(a) - g(b) = 0$ и $f(b) - g(b) \geq f(a) - g(b) = 0$, тј. или узима вредност 0 у неком од крајева или у њима узима вредности различитих знакова. Међутим, и у последњем случају, из непрекидности, следи постојање тачке из $[a, b]$ у којој $f(x) - g(x)$ узима вредност 0.

5. Нека је $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрекидна функција. Доказати да постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(c) = \operatorname{tg} c$.

Решење. Ако је $f(0) = 0$, може се изабрати $c = 0$.

Иначе, нека је $g(x) = f(x) - \operatorname{tg} x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Функција g је непрекидна (као композиција непрекидних функција) и важи $g(0) = f(0) - \operatorname{tg}(0) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = -\infty$, тј. g узима и позитивне и негативне вредности. Следи (непрекидност), да мора узимати и вредност нула, тј. постоји $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ тако да важи $0 = g(c) = f(c) - \operatorname{tg} c$, одакле следи тврђење задатка.

6. Колико нула има функција $f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n}$, где је $a_1 < a_2 < \dots < a_n$?

Решење. Функција f је дефинисана за $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Она је непрекидна на интервалу (a_i, a_{i+1}) , за свако $i \in \{1, \dots, n-1\}$, као композиција непрекидних функција. Како је $\lim_{x \rightarrow a_k^+} f(x) = \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i - a_k} +$

$\lim_{x \rightarrow a_k^+} \frac{1}{x - a_k} = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a_k^-} f(x) = \sum_{i \neq k} \frac{1}{a_i - a_k} + \lim_{x \rightarrow a_k^-} \frac{1}{x - a_k} = -\infty$ за $k \in \{1, \dots, n\}$, следи да f на сваком од горе уочених интервала узима и позитивне и негативне вредности. Како непрекидна функција има својство међувредности, f на сваком од ових интервала узима вредност нула, па има најмање $n - 1$ нула.

Сређивањем, f се може приказати у облику $f(x) = \frac{F(x)}{(x - a_1) \dots (x - a_n)}$, где је $F(x)$ збир n полинома степена $n - 1$, тј. полином степена не већег од $n - 1$. Како су нуле функције $f(x)$ међу нулама функције $F(x)$, f има највише $n - 1$ нула.

Дакле, f има тачно $n - 1$ нула.

7. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрекидно пресликавање и нека су $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Доказати да постоји реалан број c за који важи

$$f(c) = \frac{n}{\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)}}.$$

Решење. Нека је $m = \min\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ и $M = \max\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Тада је $m \leq \frac{n}{\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} + \dots + \frac{1}{f(x_n)}} \leq M$ и важи $m, M \in f((a, b))$, тј. $[m, M] \subseteq f((a, b))$. Како је $f((a, b))$ повезан скуп (непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп), следи тврђење задатка.

Напомена. Израз који се јавља у задатку је хармонијска средина бројева $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

8. Нека функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ испуњава услов $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, где је $a > 0$.

(а) Доказати да је f периодична.

(б) Доказати да f има бар једну тачку прекида.

Решење. (а) Како за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{2}{-2f(x)} = -\frac{1}{f(x)},$$

важи $f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x)$, тј. $4a$ је један од периода функције f .

(б) Нека је f непрекидна функција. Тада f не сме узимати вредност 1 (јер би дошло до дељења нулом), па самим тим ни вредност 0 (јер, ако је $f(x) = 0$, тада је $f(x+a) = \frac{1+0}{1-0} = 1$). Тада за свако реално x , $f(x)$ и $f(x+2a) = -\frac{1}{f(x)}$ су различитог знака, па f (због непрекидности) мора узети вредност нула, што је контрадикција, тј. f има бар једну тачку прекида.

9. Нека је $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Испитати тачност тврђења:

(а) Каква год да је f , постоји ξ са особином $f(\xi) = \ln \xi$.

(б) Каква год да је f , постоји ξ са особином $f(\xi) = \ln \operatorname{tg} \xi$.

Решење. (а) Функција $f(x) = x$ је непрекидна на $\mathbb{R}_0^+$ и важи $\ln x \leq x - 1 < x$ за свако $x \in \mathbb{R}_0^+$. Следи да тврђење из дела (а) није тачно.

(б) Нека је f произвољна функција, непрекидна на $\mathbb{R}_0^+$. Тада је f непрекидна и на $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Следи да је функција $g(x) = \ln \lg x - f(x)$ непрекидна на $(0, \frac{\pi}{2})$ и важи $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln \lg x - f(0) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \ln \lg x - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$, па g узима и позитивне и негативне вредности. Због непрекидности (на повезаном скупу) узима и вредност нула, одакле следи тврђење дела (б).

10. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ важи да за сваку непрекидну функцију $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ постоји $\xi \in [0, 1]$, тако да је $f(\xi) = \frac{\xi - 3}{\xi^2 - \xi + \alpha}$?

Решење. Важи $\frac{x-3}{x^2-x+\alpha} \neq 0$ за $x \in [0, 1]$ и $x^2 - x + \alpha \neq 0$. Следи, функција $f(x) = 0$ је непрекидна и не задовољава захтев задатка (за свако $\alpha \in \mathbb{R}$).

11. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ важи да за сваку непрекидну функцију $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ постоји $\xi \in [0, 1]$, тако да је $f(\xi) = \frac{\xi - \frac{1}{2}}{\xi^2 - \xi + \alpha}$?

Решење. Слика скупа $[0, 1]$ функцијом $x^2 - x$ је $[-\frac{1}{4}, 0]$.

Ако је α ван интервала $[0, \frac{1}{4}]$, следи да је функција $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+\alpha}$ добро дефинисана и непрекидна на $[0, 1]$, па узима своју највећу вредност, M . Функција $f(x) = M + 1$ је непрекидна и не задовољава захтев задатка.

Ако је $\alpha = 0$ и f непрекидна функција на $[0, 1]$, функција $g(x) = f(x) - \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x}$ је непрекидна на повезаном скупу $(0, 1)$ и важи $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \infty$, па негде узима вредност 0, тј. задовољен је захтев задатка.

Ако је $\alpha = \frac{1}{4}$, важи $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+\frac{1}{4}} \neq 0$ за $x \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ (за $x = \frac{1}{2}$ ова функција није дефинисана), па следи да је функција $f(x) = 0$ непрекидна и не задовољава захтев задатка.

Ако је $\alpha \in (0, \frac{1}{4})$, следи да $x^2 - x + \alpha$ има нуле $\beta, \gamma \in (0, 1)$, $\beta < \gamma$. Како је, по Виетовим правилима, $\beta + \gamma = 1$, следи $\beta < \frac{1}{2} < \gamma$. Ако је f произвољна непрекидна функција, следи да је $g(x) = f(x) - \frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+\alpha}$ непрекидна на повезаном скупу (β, γ) , а како је $\lim_{x \rightarrow \beta+} g(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \gamma-} g(x) = \infty$, негде узима вредност 0, тј. задовољен је захтев задатка.

12. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и $f(0) = f(1)$.

(а) Ако је $n \in \mathbb{N}$ доказати да постоји $x \in [0, 1]$ тако да је $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

(б) Мора ли постојати x , тако да је $f(x) = f(x + \frac{2}{2017})$?

Решење. (а) Нека је $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ за $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Функција $g(x)$ је непрекидна на $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, као композиција непрекидних, и важи $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$. Ако ниједан од сабирака није једнак 0, не могу сви бити

константног знака, па g узима и позитивне и негативне вредности на (повезаном) скупу $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, а како је непрекидна, негде узима вредност 0, што даје тврђење.

(б) Важи $\frac{1}{1009} < \frac{2}{2017} < \frac{1}{1008}$. Посматрајмо праве $a_k : y = x - \frac{k}{1008}$ и $b_k : y = -x + \frac{k+1}{1009}$ за $k \in \{0, \dots, 1008\}$. За свако $k \in \{0, \dots, 1007\}$ нека се праве a_k и b_k секу у A_k , а праве b_k и a_{k+1} у B_k . У сваком интервалу $[\frac{k}{1009}, \frac{k+1}{1009}]$ за $k \in \{1, \dots, 1007\}$ се налази тачно једна тачку облика $\frac{m}{1008}$, $m \in \mathbb{N}$ (јер је дужина тог интервала $\frac{1}{1009}$). Ако је $O(0,0)$ и $K(1,0)$, изломљена линија $OA_1B_1 \dots A_{1007}B_{1007}A_{1008}K$ представља график непрекидне функције на $[0, 1]$.

Ако се тачке (са истом y -координатом) налазе на две узастопне дужи ове линије, онда је њихово растојање мање од растојања између правих b_k и b_{k+1} , па је мање од $\frac{1}{1009} < \frac{2}{2017}$. Ако између дужи којима припадају постоји више од једне дужи, растојање је веће од растојања између правих a_k и a_{k+1} , па је веће од $\frac{1}{1008} > \frac{2}{2017}$. Ако је између дужи којима припадају постоји тачно једна дуж, тражено растојање је или $\frac{1}{1009} \neq \frac{2}{2017}$ или $\frac{1}{1008} \neq \frac{2}{2017}$. Следи да овако конструисана функција нема сечицу паралелну x -оси чија је дужина $\frac{2}{2017}$.

13. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрекидна функција, таква да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \cdot f(y)$. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = (f(1))^{x^2}$.

Решење. За $x = y = 0$ се добија да је $f(0) = (f(0))^2$, па како је $f(0) > 0$, следи $f(0) = 1$. За $y = 0$ се добија $f(|x|) = f(x)$, па је f парна, тј. довољно је одредити f на $\mathbb{R}^+$.

Нека је $x > 0$. Индукцијом се добија да је $f(\sqrt{n} \cdot x) = (f(x))^n$ за $n \in \mathbb{N}$. Заиста, за $n = 1$ је тврђење тривијално тачно, а ако је тачно за n , следи да је $f(\sqrt{n+1} \cdot x) = f(\sqrt{(\sqrt{n} \cdot x)^2 + x^2}) = f(\sqrt{n} \cdot x) \cdot f(x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}$.

Дакле, за $x \in \mathbb{N}$ важи $f(\sqrt{n}) = (f(1))^n$. Ако је $r \in \mathbb{Q}^+$, следи да је $r = \frac{p}{q}$ за неке $p, q \in \mathbb{N}$, па је $(f(1))^p = f(\sqrt{p}) = f(\sqrt{q \cdot r}) = (f(\sqrt{r}))^q$, тј. $f(\sqrt{r}) = (f(1))^r$. Како је скуп $\{\sqrt{r} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ густ у $\mathbb{R}^+$ и како је f непрекидна, следи да је $f(\sqrt{x}) = (f(1))^x$ за све $x \in \mathbb{R}^+$, одакле следи и тврђење задатка.

14. Одредити све непрекидне функције $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такве да за свако $x \in [0, \infty)$ важи $f(x) = f(x^2 - 2x + 2)$.

Решење. Нека су низови $(a_n)_{n \geq 0}$ и $(b_n)_{n \geq 0}$ дефинисани са $0 < a_0 < 2$, $2 < b_0$ и $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, $b_{n+1} = 1 + \sqrt{b_n - 1}$ за $n \geq 0$.

Важи $-1 < a_0 - 1 < 1$. Ако је $-1 < a_n - 1 < 1$, како је $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2$, следи $0 \leq a_{n+1} - 1 < 1$, па индукцијом следи да за свако $n \geq 1$ важи $1 \leq a_n < 2$. Следи $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 1)(a_n - 2) \leq 0$, тј. монотоност низа $(a_n)_{n \geq 1}$, па је он конвергентан. Пуштањем граничне

вредности у везу којом је дефинисан низ, ако је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, следи $a = a^2 - 2a + 2$, па је $a \in \{1, 2\}$. Како је низ нерастући, следи $a = 1$.

Слично, $(b_n)_{n \geq 1}$ је добро дефинисан ($b_n > 1$) и како је $b_0 - 1 > 1$ и како из $b_n - 1 > 1$ следи $b_{n+1} - 1 > 1$, индукцијом је $b_n > 2$ за свако n , па је $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n - 1}(1 - \sqrt{b_n - 1}) < 0$, низ је опадајући, па конвергира. Пуштањем граничне вредности у везу којом је дефинисан низ, ако је $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, следи $b = 1 + \sqrt{b - 1}$, па је $b \in \{1, 2\}$. Како је низ опадајући и $b_n > 2$, следи $b = 2$.

Нека је $y \in (0, 2)$ и $a_0 = x$. Услов задатка постаје $f(a_n) = f(a_{n+1})$, па је $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(1)$ (јер је f непрекидна).

Нека је $y > 2$ и $b_0 = y$. По услови задатка је $f(b_{n+1}) = f(b_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, па је $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(2)$ (јер је f непрекидна).

Ако је $y = 0$, тривијално је $f(0) = f(2)$. Дакле, дату једначину могу задовољавати непрекидне функције које узимају једну вредност на $\{0\} \cup [2, \infty)$, а другу на $(0, 2)$, тј. морају бити константне. Са друге стране, константне функције задовољавају везу из задатка, па су ово сва решења уочене једначине.

15. Одредити све непрекидне функције, за које за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(f(x)) = -x^3$.

Решење. Функција $-x^3$ је строго опадајућа на $\mathbb{R}$ (самим тим и 1-1). Ако је $f(x) = f(y)$, из услова задатка следи $-x^3 = f(f(x)) = f(f(y)) = -y^3$, тј. $x = y$, па је f и 1-1. Како је f и непрекидна, мора бити строго монотона.

- (1) Ако је f растућа и $x < y$, следи $f(x) < f(y)$, тј. $f(f(x)) < f(f(y))$, одакле је $-x^3 = f(f(x)) < f(f(y)) = -y^3$, тј. $y < x$, што је немогуће.
- (2) Ако је f опадајућа и $x < y$, следи $f(x) > f(y)$, тј. $f(f(x)) < f(f(y))$, одакле је $-x^3 = f(f(x)) < f(f(y)) = -y^3$, тј. $y < x$, што је немогуће.

Из претходне контрадикције следи да не постоји тражена функција.

16. Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне функције за које постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(c) = f(g(g(c)))$. Доказати да постоји $d \in \mathbb{R}$ за које је $f(d) = f(g(d))$.

Решење. Нека је $h(x) = f(g(x)) - f(x)$. Функција h је непрекидна, као композиција непрекидних, а по услову задатка, важи $h(g(c)) = -h(c)$. Ако је $h(c) \neq 0$, из претходног следи да $h(x)$ на (повезаном) скупу $\mathbb{R}$ узима и позитивну и негативну вредност, па негде узима и вредност 0. Ако је $h(d) = 0$, следи $f(d) = f(g(d))$, што је тврђење задатка.

17. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је $f^{-1}(\{y\})$ двочлан за свако $y \in \mathbb{R}$. Доказати да f није непрекидна.

Решење. Нека је f непрекидна, $y \in \mathbb{R}$ и $a \neq b$ такви да је $f(a) = f(b) = y$. Према Вајерштрасовој теореме, функција достиже минимум и максимум на $[a, b]$ и бар један од њих је различит од y (иначе је f константна на $[a, b]$). Без умањења општости, нека се максимум достиже у $c \in (a, b)$ и нека је $f(c) = z$ (иначе се може посматрати функција $-f(x)$). Како је $f^{-1}(z)$ двочлан, следи да постоји $d \neq c$ такво да $f(d) = z$.

- (1) Ако $d \notin [a, b]$, нека је, без умањења општости, $d > b$ (иначе се може посматрати функција $f(a + b - x)$). Нека је $y < t < z$. Онда, по Болцановој теореме, f узима вредност t на (a, c) , на (c, b) и на (b, d) , па $f^{-1}(t)$ није двочлан.
- (2) Ако $d \in [a, b]$, нека је, без умањења општости, $a < c < d < b$ (иначе се може посматрати функција $f(a + b - x)$). Функција f на (c, d) узима вредности строго мање од z . Ако је $\min_{w \in (c, d)} f(w) < t < z$, онда f узима вредност t на (a, c) , на (c, d) и на (d, b) , па $f^{-1}(t)$ није двочлан.

Из добијене контрадикције следи тврђење задатка.

18. Доказати да не постоји непрекидна ограничена функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је за сваки рационалан број x , $f(x)$ ирационалан, а за сваки ирационалан број y , $f(y)$ рационалан.

Решење. Ако је $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ непрекидна, где су $a < b$ реални бројеви, онда постоји $c \in [a, b]$, тако да је $g(c) = c$, тј. g има фиксну тачку. Заиста, ако је $G(x) = g(x) - x$, онда је $G(a) \geq 0$ и $G(b) \leq 0$, па према Болцано-Кошијевој теореме (непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп), постоји $c \in [a, b]$ такво да је $F(c) = 0$, тј. постоји c такво да је $g(c) = c$.

Нека постоји функција која задовољава услове задатка. Онда постоји реалан број M такав да је $|f(x)| \leq M$ за свако $x \in \mathbb{R}$. То значи да је $f : [-M, M] \rightarrow [-M, M]$ непрекидна функција. Као таква, она има фиксну тачку, тј. постоји $z \in [-M, M]$ такво да је $f(z) = z$. Ако је z рационалан број, тада је и $z = f(z)$ рационалан, а ако је z ирационалан, тада је $z = f(z)$ рационалан, што је контрадикција са претпоставком да таква функција постоји.

Уопштење: Ако је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција тада се скуп $\mathbb{R}$ не може представити као дисјунктна унија скупова A и B таквих да је $f(A) \subseteq B$ и $f(B) \subseteq A$.

Доказ: Нека таква функција постоји. Пошто је f непрекидна, постоји M такво да је $|f(x)| \leq M$ за $x \in [-1, 1]$. Нека је $g(x) = \frac{f(x)}{M}$ на $[-1, 1]$. Тада $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ и важи $g(A') \subseteq B'$ и $g(B') \subseteq A'$, при чему су

$A' = \frac{A}{M} \cap [-1, 1]$ и $B' = \frac{B}{M} \cap [-1, 1]$. Међутим функција има фиксну тачку z и то је контрадикција (слично као у претходном случају).

19. Нека је $a \in \mathbb{R}$ и $f: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax} \sin x$. Нека је $g(a)$ тачка у којој функција f достиже максимум, за $a \neq 0$, односно $g(0) = \frac{\pi}{2}$ и $m(a) = f(g(a))$. Испитати непрекидност функција g и m .

Решење. За свако a дата функција узима вредности нула у крајевима интервала, а у $(0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi)$ позитивне вредности. Следи да је (за $a \neq 0$) тражени максимум решење једначине $0 = f'(x) = e^{ax} (a \sin x + \cos x)$. За $a > 0$ је функција e^{ax} растућа, па је у овом случају тражена тачка решење једначине $\tan x = -\frac{1}{a}$ у $(2\pi, 3\pi)$. Слично, за $a < 0$ је функција e^{ax} опадајућа, па је у овом случају тражена тачка решење једначине $\tan x = -\frac{1}{a}$ у $(0, \pi)$. Следи да је

$$g(a) = \begin{cases} 3\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{a}, & \text{за } a > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{за } a = 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{1}{a}, & \text{за } a < 0 \end{cases}.$$

Добијена функција је непрекидна за све $a \neq 0$, као композиција непрекидних функција. Како је $\lim_{a \rightarrow 0-} -\operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} = g(0)$ и $\lim_{a \rightarrow 0+} 3\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = \frac{5\pi}{2} \neq g(0)$, функција није непрекидна у нули (полунепрекидна је слева).

Функција m је непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, као композиција непрекидних функција (f је непрекидна). Аналогно, f је полунепрекидна слева у нули. За $a > 0$ је $\sin g(a) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 g(a)}{1 + \operatorname{tg}^2 g(a)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$, па је $m(a) = \frac{e^{3\pi a}}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot e^{-a \operatorname{arctg} \frac{1}{a}}$. Како је $\operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ ограничено, следи да је $\lim_{a \rightarrow 0+} a \operatorname{arctg} \frac{1}{a} = 0$, па је $\lim_{a \rightarrow 0+} m(a) = 1 = m(0)$, тј. f је полунепрекидна и сдесна у нули, односно, следи да је m непрекидна на $\mathbb{R}$.

20. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и $\phi(x) = f(x) + f(2-x)$.

(а) Доказати да је функција ϕ конвексна.

(б) Доказати да је функција ϕ монотона на $(-\infty, 1]$ и на $[1, \infty)$.

(в) Одредити $\phi(\mathbb{R})$.

Решење. (а) Како је f конвексна, следи да за $\lambda \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f(2 - (\lambda x + (1-\lambda)y))$$

$$\begin{aligned}
&= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + f(\lambda(2-x) + (1-\lambda)(2-y)) \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda f(2-x) + (1-\lambda)f(2-y) \\
&= \lambda \phi(x) + (1-\lambda)\phi(y),
\end{aligned}$$

па је и ϕ конвексна.

(б) За $y > x$ важи

$$\begin{aligned}
\phi(y) - \phi(x) &= (y-x) \cdot \left[\frac{f(y) - f(x)}{y-x} + \frac{f(2-y) - f(2-x)}{y-x} \right] \\
&= (y-x) \cdot \left[\frac{f(y) - f(x)}{y-x} - \frac{f(2-x) - f(2-y)}{(2-x) - (2-y)} \right]. \quad (*)
\end{aligned}$$

Ако је $1 < x < y$, следи да је $2-y < 2-x < x < y$, па је израз (*) ненегативан као производ два ненегативна чиниоца (нагиб сечице конвексне функције не опада), тј. ϕ на $[1, \infty)$ расте. Слично, како за $x < y < 1$ важи $x < y < 2-y < 2-x$, добија се да ϕ опада на $(-\infty, 1]$.

(в) Ако је $\phi \equiv c \in \mathbb{R}$, тада је $\phi(\mathbb{R}) = \{c\} (= \{2f(1)\})$ (ово се дешава када је f симетрична у односу на праву $x = 1$). Иначе, ϕ није константна. Нека је, на пример, $\phi(x) \neq \phi(1)$ за неко $x > 1$ (аналогно се ради ако је $x < 1$). Тада је, по (б), $\phi(1) < \phi(x)$, па за свако $z > x$, како нагиб сечице конвексне функције не опада, важи $0 < k = \frac{\phi(x) - \phi(1)}{x-1} \leq \frac{\phi(z) - \phi(x)}{z-x}$, одакле је $\phi(z) = \phi(x) + k(z-x) \rightarrow \infty$ кад $z \rightarrow \infty$. Следи да је ϕ неограничена. Како је конвексна функција на $\mathbb{R}$ и непрекидна, по (б) следи да је $\phi(\mathbb{R}) = [\phi(1), \infty) = [2f(1), \infty)$ (непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп).

21. Нека је $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна и парна функција и важи $f(0) = f(1) = 0$.

(а) Доказати да је функција f константна на $[-1, 1]$.

(б) Доказати да је f монотона на $[0, 2]$. (в) Наћи $f([-2, 2])$.

Решење. Нека је $x \in (0, 1)$. Како је f конвексна, нагиб сечице расте, па је $\frac{f(0) - f(-x)}{0 - (-x)} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Како је f парна и $f(0) = 0$, следи $f(x) \geq 0$. Аналогно је $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0$, одакле је $f(x) \leq 0$. Следи $f(x) = 0$ за $x \in (0, 1)$, па је то испуњено и за $x \in (-1, 1)$ (због парности).

По претходном, за (б) је довољно показати монотоност на $[1, 2]$. Нека је $1 \leq x < y$. Следи да је $0 = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$, па је $f(x) \leq f(y)$. Ако за неко x важи $f(x) > 0$, следи да је за $2 \geq z > y > x$ испуњено $0 < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$, тј. $f(y) < f(z)$, односно f строго расте на скупу на коме узима вредности различите од нуле.

Конвексна функција на отвореном интервалу је и непрекидна. Ако је $f \equiv 0$, следи $f([-2, 2]) = \{0\}$.

Иначе, како је f и неоппадајућа на $(0, 2)$, следи да је $f((0, 2)) = (f(0), \lim_{x \rightarrow 2-} f(x))$ (непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп; претходна гранична вредност постоји, јер је f неоппадајућа на $(0, 2)$, ограничена са $f(2)$), па је $f([-2, 2]) = [0, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)) \cup \{f(2)\}$.

22. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ сурјективно пресликавање.

(а) Дати пример таквог пресликавања.

Испитати тачност тврђења:

(б) f није строго монотона.

(в) $(\exists x, y \in [0, 1]) |f(x) - f(y)| > |x - y|$.

(г) $(\exists x, y \in [0, 1]) |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

(д) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x, y \in (0, 1)) |x - y| < \varepsilon \wedge |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Решење. (а) Једно такво пресликавање је $g(x) = \begin{cases} x, & \text{за } x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2}, & \text{за } x \in \{0, 1\} \end{cases}$.

(б) Како је $f(0) \in (0, 1)$ и f сурјективна, постоје $\alpha, \beta \in (0, 1)$ тако да је $f(0) > f(\alpha)$ и $f(0) < f(\beta)$, f не може бити строго монотона.

(в) Ако тврђење (в) не би важило (тј. ако би било $(\forall x, y \in [0, 1]) |f(x) - f(y)| < |x - y|$), тада би f била непрекидна. Међутим, то је у контрадикцији са $f([0, 1]) = (0, 1)$, јер је непрекидна слика компактног скупа компактан скуп, па је и ово тврђење тачно.

(г) За $x = 0, y = 0$ важи $f(0), f(1) \in (0, 1)$, па је $|f(0) - f(1)| < 1 = |0 - 1|$, тј. и ово тврђење је тачно.

(д) Довољно је доказати да је ово тврђење тачно за $0 < \varepsilon < 1$ (иначе је тривијално). Нека је $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ и $(x_i)_{i=1}^n$ тачке у $(0, \varepsilon)$. За све $1 \leq i, j \leq n$ важи $|x_i - x_j| < \varepsilon$. Како су $(f(x_i))_{i=1}^n$ тачке у $(0, 1)$, постоје $1 \leq i, j \leq n$ тако да $|f(x_i) - f(x_j)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$, па следи и тврђење (д).

23. Одредити кардиналност скупова A и $A \cap B$, где је

$$A = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ је непрекидна}\},$$

$$B = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ је бијекција}\}.$$

Решење. Непрекидне функције на $[0, 1]$ су једнозначно одређене вредностима на $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Функција из $\mathbb{Q}$ у $\mathbb{R}$ има $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$, па је $|A| \leq c$, а како су све функције у $C = \{kx \mid 0 < k \leq 1\}$ непрекидне и има их c , следи да је $|A| = c$. Како су функције у C и бијекције и $A \cap B \subset A$, следи $|A \cap B| = c$.

24. (а) Нека је $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, таква да постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Доказати да је f равномерно непрекидна функција.

(б) Ако су f и g равномерно непрекидне функције, таква је и $f \circ g$. Доказати.

(в) Доказати да је функција $\arctg x$ равномерно непрекидна на скупу реалних бројева.

Решење. (а) Нека је $\varepsilon > 0$. Како постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$, следи да постоји $M \in \mathbb{R}$, тако да је $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ за све $x, y > M$. На $[0, M+1]$ је функција равномерно непрекидна (Канторова теорема), па постоји δ тако да је $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ за све x, y за које је $|x - y| < \delta$. Нека је $\delta_1 = \min\{\delta, 1\}$ и $x, y \in \mathbb{R}$ такви да је $|x - y| < \delta_1$.

(1) Ако је $x, y \leq M+1$, тада је $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ за све $|x - y| < \delta_1 \leq \delta$ по избору δ .

(2) Ако је $x, y > M$, тада је $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ за све x, y по избору M (па и за x, y за које је $|x - y| < \delta_1$).

(3) Не може се десити да је $x \leq M$ и $y > M+1$, јер је $|x - y| < \delta_1 \leq 1$.

(б) Нека је $\varepsilon > 0$. Из равномерне непрекидности f на $Dom(f)$, следи равномерна непрекидност на $D = Dom(f) \cap g(Dom(g))$, па постоји δ тако да за све $x, y \in D$ за које је $|x - y| < \delta$ важи $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Због равномерне непрекидности g следи да постоји δ_1 тако да је $|g(x) - g(y)| < \delta$ за све $x, y \in Dom(g)$ за које је $|x - y| < \delta_1$.

Дакле, за све $x, y \in Dom(g)$ за које је $|x - y| < \delta_1$ важи $|f \circ g(x) - f \circ g(y)| < \varepsilon$, што, како је ε произвољно, значи да је $f \circ g$ равномерно непрекидна.

(в) Аналогно тврђење тврђењу (а) важи и за егзистенцију граничне вредности у $-\infty$, па (в) следи непосредно из (а), јер је функција $\arctg x$ непрекидна на $\mathbb{R}$ и постоје $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x \left(= \frac{\pi}{2} \right)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x \left(= -\frac{\pi}{2} \right)$.

Напомена. Тврђење дела (в) се може добити и из ограничености извода функције $\arctg x$.

25. Доказати да је непрекидна, монотона и ограничена функција на скупу $\mathbb{R}$ равномерно непрекидна на том скупу.

Решење. Функција (f) је непрекидна на $[-1, \infty)$, а како је монотона и ограничена, постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, па је f равномерно непрекидна на $[-1, \infty)$. Аналогно је f равномерно непрекидна и на $(-\infty, 1]$, па и на $\mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup [-1, \infty)$.

26. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = (x^2 + x) \sin \frac{1}{x}$ на скупу (а) $(0, 1)$; (б) $(0, \infty)$.

Решење. Дата функција је диференцијабилна на $(0, \infty)$, као композиција диференцијабилних функција (самим тим и непрекидна на $(0, \infty)$).

(а) Како је $0 \leq |f(x)| = |x^2 + x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |x^2|$ и како је $\lim_{x \rightarrow 0} (|x| + |x^2|) = 0$, следи да је функција $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{за } x = 0 \end{cases}$ непрекидна. По Канторовој теорему следи да је g равномерно непрекидна на $[0, 1]$, па је равномерно непрекидна и њена рестрикција на $(0, 1)$. Међутим, на овом интервалу су функције f и g идентичне, па је и f равномерно непрекидна на $(0, 1)$.

(б) На интервалу $[1, \infty)$ важи

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \left| (2x+1) \sin \frac{1}{x} - (x^2+x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x} \right| \\ &\leq 2 \left| x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \cos \frac{1}{x} \right| + \frac{1}{x} \cdot \left| \cos \frac{1}{x} \right|. \end{aligned}$$

Како за свако $t > 0$ важи $|\sin t| \leq 1$, $|\cos t| \leq 1$ и $|\sin t| \leq t$, следи $|f'(x)| \leq 2 + 1 + 1 + \frac{1}{x} \leq 5$ на $[1, \infty)$.

Дакле, на $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ је $f'(x)$ ограничен, па је функција f равномерно непрекидна на том скупу. Како је она (по (а)) равномерно непрекидна и на $(0, 1)$, следи и равномерна непрекидност на $(0, \infty) = (0, 1) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$.

27. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \frac{\sin \ln(1+x)}{x}$ на скупу $(0, \infty)$.

Решење. Како је $\sin \ln(1+x) = \sin(x+o(x)) = x+o(x)+o(x+o(x)) = x+o(x)$ кад $x \rightarrow 0$, следи да је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+o(x)}{x} = 1$,

па је функција g , дефинисана са $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x > 0 \\ 1, & \text{за } x = 0 \end{cases}$ непрекидна,

па је и равномерно непрекидна на $[0, 2]$ (Канторова теорема). Следи да је равномерно непрекидна и на $(0, 2]$, а како се на овом скупу поклапа са f и f је равномерно непрекидна на $(0, 2]$.

Како је $f \in C[1, \infty)$ и како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (коначан), следи да је f равномерно непрекидна и на овом скупу, па је равномерно непрекидна и на $(0, \infty) = (0, 2] \cup [1, \infty)$.

28. Нека је $f(x) = \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$ за $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(а) Наћи $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(б) Испитати равномерну непрекидност функције f на $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Решење. Како је $\cos x > 0$ за $0 < x < \frac{\pi}{3}$, следи дефинисаност функције f (на том интервалу). Из непрекидности функција $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ и e^x , њихових развоја и особина „малог o ” следи $(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(\cos x)} =$

$e^{(x+o(x)) \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = e^{(x+o(x))\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
 кад $x \rightarrow 0$. Дакле,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) = \frac{1}{2}.$$

(б) По (а), функција се може дефинисати на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, тако да буде непрекидна (из (а) следи $\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{2}$; очигледно је $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$). Та функција је равномерно непрекидна по Канторовој теорему (непрекидна на компактном скупу), па је равномерно непрекидна и њена рестрикција на $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

29. Нека је $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, за $x \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Испитати равномерну непрекидност функције $g(x)$ на $[0, \infty)$ и на $[0, \alpha)$, где је $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Решење. Ако је $0 < a \leq b \leq c$, онда $c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3} \cdot c$, па како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, по лемии о два полицајца следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$, тј. $g(x) = \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\}$, односно

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \in [0, 1] \\ x, & \text{за } x \in (1, 2] \\ \frac{x^2}{2}, & \text{за } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

Функција је очигледно непрекидна, па је по Канторовој теорему равномерно непрекидна на $[0, \alpha]$ (компакт), па и на $[0, \alpha)$ (рестрикција). Нека је $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$, за $n \in \mathbb{N}$. Онда $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ и $|g(x_n) - g(y_n)| = 1 + \frac{1}{2n^2} \not\rightarrow 0$, па g није равномерно непрекидна на $[0, \infty)$.

30. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = x \cos x^2$ на $(0, \infty)$.

Решење. Нека су низови $(a_n)_{n \geq 1}$ и $(b_n)_{n \geq 1}$ дефинисани са $a_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ и $b_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}}$ за $n \geq 1$. Онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$ и $|f(b_n) - f(a_n)| = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{2\pi} + o(1)$ кад $n \rightarrow \infty$, односно $|f(b_n) - f(a_n)| \not\rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па $x \cos x^2$ није равномерно непрекидна на $(0, \infty)$.

31. Испитати равномерну непрекидност функције $f(x) = \sqrt{|x|} \cdot e^{-x}$ на скупу: (а) $(0, \infty)$; (б) $\mathbb{R}$.

Решење. (а) Функција f је непрекидна на интервалу $[0, 1]$ (као композиција непрекидних функција), па је и равномерно непрекидна на истом интервалу, по Канторовој теорему.

Функција f је непрекидно-диференцијабилна на интервалу $(1, \infty)$ (као композиција непрекидно-диференцијабилних функција; на овом интервалу важи $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$). Како је $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} \cdot (2x - 1)$, следи $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, па је f и равномерно непрекидна на истом интервалу, јер је f' ограничен.

Следи да је f равномерно непрекидна на $[0, \infty) = [0, 1] \cup (1, \infty)$, па и на $(0, \infty)$ (рестрикција равномерно непрекидне функције је равномерно непрекидна).

(б) Нека су низови $(a_n)_{n \geq 1}$ и $(b_n)_{n \geq 1}$ дефинисани са $a_n = -n, b_n = -n - \frac{1}{n}$ за $n \geq 1$. Онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ и $|f(b_n) - f(a_n)| = \sqrt{n} \cdot e^n \cdot \left[e^{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right] = \sqrt{n} \cdot e^n \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1 \right] = \sqrt{n} \cdot e^n \cdot \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(b_n) - f(a_n)| = \infty$. Дакле, функција f није равномерно непрекидна на скупу $\mathbb{R}$.

5. ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ

1. Нека је $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{за } x \neq 0 \\ a, & \text{за } x = 0 \end{cases}$.

(а) Одредити a тако да функција f буде непрекидна у нули.

(б) Испитати егзистенцију првог и другог извода функције f у нули.

Решење. (а) Функција f је непрекидна у нули ако и само ако важи $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, па следи $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + o(x)} = 1$.

(б) По дефиницији првог извода и делу (а) је

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1}{x(1 + x + o(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

па је функција дефинисана у (а) диференцијабилна у нули. Она је диференцијабилна и за $x \neq 0$ и за такво x важи $f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$, па је

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - xe^x + \frac{1}{2}(e^x - 1)^2}{x(e^x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1)^2} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 1 - x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) + \frac{1}{2} \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1)^2 \right] \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{1}{2}(x^2 + x^3 + o(x^3))}{x(x^2 + o(x^2))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

па је функција дефинисана у (а) два пута диференцијабилна у нули.

2. Одредити све $\alpha \in \mathbb{R}$ за које се функција $f(x) = \frac{\sin |x|}{|x|^\alpha}$ може додефинисати у тачки $x = 0$, тако да буде непрекидно-диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

Решење. Ако је $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, функција је бесконачно диференцијабилна (па и непрекидно-диференцијабилна). Како је $f(x) = \frac{\sin |x|}{|x|^\alpha} \sim \frac{|x|}{|x|^\alpha} = \frac{1}{|x|^{\alpha-1}}$ кад $x \rightarrow 0$, следи да се за $\alpha > 1$ функција не може додефинисати у нули тако да буде непрекидна (самим тим ни непрекидно-диференцијабилна), за $\alpha = 1$ је по непрекидности $f(0) = 1$, а за $\alpha < 0$ је $f(0) = 0$.

Нека је $\alpha < 1$. Онда за $x \neq 0$ важи

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos |x| \cdot \operatorname{sgn} x \cdot |x|^\alpha - \sin |x| \cdot \alpha \cdot |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} x}{|x|^{2\alpha}} \\ &= \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^{\alpha+1}} \cdot (|x| \cos |x| - \alpha \sin |x|) \\ &= \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^{\alpha+1}} \cdot (|x|(1 + o(1)) - \alpha(|x| + o(|x|))) \\ &= \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^{\alpha+1}} \cdot |x| \cdot (1 - \alpha + o(1)) \sim (1 - \alpha) \cdot \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\alpha} \end{aligned}$$

кад $x \rightarrow 0$. Следи:

(1) за $\alpha < 0$ је $\frac{f(x)-f(0)}{x} \sim \frac{1}{x \cdot |x|^{\alpha-1}}$ кад $x \rightarrow 0$, односно $f'(0) = 0$, па је $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = f'(0)$, тј. f је непрекидно-диференцијабилна и у нули;

(2) за $\alpha \in [0, 1)$ је $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -\infty$, па се f не може додефинисати у нули тако да буде непрекидно-диференцијабилна;

(3) за $\alpha = 1$ је $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\sin |x| - |x|}{x|x|} \sim \frac{|x|^2}{6x}$ кад $x \rightarrow 0$, па је $f'(0) = 0$ и $f'(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^2} \cdot (|x|(1 - \frac{|x|^2}{2} + o(|x|^2)) - (|x| - \frac{|x|^3}{6} + o(|x|^3))) = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \frac{|x|^3}{|x|^2} \cdot (1 + o(1)) \sim \frac{2}{3} \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, па је $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, тј. f (додефинисана са $f(0) = 1$) је непрекидно-диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

3. Нека је $g(x) = \begin{cases} x^3, & \text{за } x < b \\ 3x + a, & \text{за } x \geq b \end{cases}$, где је $b > 0$. Одредити константе a и b , тако да функција g буде непрекидно-диференцијабилна на скупу $\mathbb{R}$.

Решење. Диференцијабилна функција је и непрекидна. Непрекидност g у тачки b повлачи да важи $b^3 = \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = g(b) = 3b + a$. Како је $g'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{за } x < b \\ 3, & \text{за } x > b \end{cases}$, непрекидност извода у тачки b повлачи $3 = \lim_{x \rightarrow b+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow b-} 3x^2 = 3b^2$. Како је $b > 0$, следи $b = 1$, $a = -2$. У осталим тачкама је функција непрекидно-диференцијабилна, као композиција таквих функција.

4. Нека је функција дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4} \cdot (e^{\sin x} - (1+x)^{\frac{2x+2}{x+2}}), & \text{за } x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \\ a, & \text{за } x = 0 \end{cases}$$

(а) Одредити $a \in \mathbb{R}$, тако да функција f буде непрекидна.

(б) Испитати диференцијабилност функције f за тако добијено a .

Решење. За $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ функција је диференцијабилна, као композиција таквих. Кад $x \rightarrow 0$ важи

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\ e^{\sin x} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 \\ &\quad + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \frac{2x+2}{x+2} \cdot \ln(1+x) &= (1+x)\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} \ln(1+x) \\ &= (1+x)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + o(x^4)\right) \\ &\quad \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4), \text{ па је}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{2x+2}{x+2}} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{24} \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^4 \\ &\quad + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^4\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).\end{aligned}$$

Следи да је $f(x) = -\frac{1}{6} + o(x^4)$ кад $x \rightarrow 0$, па ако је $a = -\frac{1}{6}$, функција постаје непрекидна у нули. За такво a важи и $f(x) = -\frac{1}{6} - \frac{3x}{40} + o(x)$, односно $\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{3}{40} + o(1)$ кад $x \rightarrow 0$, па је функција тада и диференцијабилна у нули.

5. Одредити $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} a \frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x}, & \text{за } x < 0 \\ b, & \text{за } x = 0 \\ x^{x^2}, & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$. За тако добијене a, b испитати диференцијабилност функције $f(x)$.

Решење. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x^2 \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x} = e^0 = 1$, ако је f непрекидна, мора бити $b = 1$.

Ако је $-1 \leq x < 0$, следи $0 < x^2 \leq 1$, па је $\sin x^2 > 0$, одакле је $\sin x^2 - x^3 > 0$ за $x \in [-1, 0)$. За $x < -1$ је $\sin x^2 - x^3 \geq -1 - x^3 > 0$.

Следи да је f добро дефинисана за $a > 0$. Како је $\frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + o(x^3) - x^3}}{x} = -\sqrt{1 - x + o(x)} = -1 + \frac{1}{2} \cdot x + o(x)$ кад $x \rightarrow 0-$,

следи да је (за $a > 0$) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} a \frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(-1 + \frac{1}{2} \cdot x + o(x)\right) = -\frac{1}{a}$, па је f непрекидна ако и само ако је $a = b = 1$.

Да би била диференцијабилна, функција мора бити непрекидна, па и у овом случају мора бити $a = b = 1$. Онда је $f(x) = 1$ за $x \leq 0$, па постоји $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + x^2 \ln x + o(x^2 \ln x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x \ln x + o(x \ln x)) = 0$, следи да је f диференцијабилна за $a = b = 1$.

6. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = |x^2 - x - 12| \cos \frac{\pi x}{2}$.

- (а) Испитати диференцијабилност функције f .
- (б) Испитати равномерну непрекидност функције f на $\mathbb{R}$.
- (в) Испитати равномерну непрекидност функције f на $(0, 1)$.

Решење. Функција $\cos \frac{\pi x}{2}$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}$, а $|x^2 - x - 12| = |(x - 4)(x + 3)|$ је диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$, па је f диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x^2 - x - 12) \cos \frac{\pi x}{2}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4+} \left[(x - 3) \cos \frac{\pi x}{2} \right] = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-(x^2 - x - 12) \cos \frac{\pi x}{2}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4-} \left[(3 - x) \cos \frac{\pi x}{2} \right] = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{-(x^2 - x - 12) \cos \frac{\pi x}{2}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3+} \left[-(x + 4) \cos \frac{\pi x}{2} \right] = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{(x^2 - x - 12) \cos \frac{\pi x}{2}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3-} \left[(x + 4) \cos \frac{\pi x}{2} \right] = 0, \end{aligned}$$

следи да је f диференцијабилна за $x = -3$, а није за $x = 4$.

Ако је $a_n = 4n + 1$ и $b_n = 4n + 1 - \frac{1}{n^2}$ за $n \in \mathbb{N}$, следи $|a_n - b_n| \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, $f(a_n) = 0$, $f(b_n) = \left(4n - 3 - \frac{1}{n^2}\right) \left(4n + 4 - \frac{1}{n^2}\right) \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n^2}\right) = 16n^2(1 + o(1))(1 + o(1)) \sin \frac{\pi}{2n^2} \rightarrow 8$ кад $n \rightarrow \infty$, па следи да f није равномерно непрекидна на $\mathbb{R}$.

Функција f је непрекидна на компакту $[0, 1]$, па је на њему и равномерно непрекидна, а онда је непрекидна и њена рестрикција на $(0, 1)$, тј. f је равномерно непрекидна на $(0, 1)$.

7. Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане са $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{3x^2 + 1}$ и $g(x) = ([f(x)] + 1) \cdot \sqrt[3]{x^2 - x}$.

(а) Одредити скуп $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

(б) Испитати непрекидност функције g .

(в) Испитати диференцијабилност функције g .

Решење. Функција f је парна, позитивна и на $[0, \infty)$ је строго опадајућа. Како је $f(0) = 2$ и $f(1) = 1$, следи $A = \{-1, 0, 1\}$ и

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x = 0 \\ 2\sqrt[3]{x^2 - x}, & \text{за } x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ \sqrt[3]{x^2 - x}, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}.$$

Важи $x^2 - x \neq 0$ на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$, па је на овом скупу g и непрекидна и диференцијабилна.

Како је $\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \sqrt[3]{x^2 - x} = \sqrt[3]{2} \neq 2\sqrt[3]{2} = g(-1)$, функција g није непрекидна (па ни диференцијабилна) за $x = -1$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2\sqrt[3]{x^2 - x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 2\sqrt[3]{x^2 - x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2\sqrt[3]{x^2 - x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt[3]{x^2 - x} = 0$, функција g је непрекидна у $x = 0$ и $x = 1$.

Кад $x \rightarrow 0+$ важи $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{2}{x} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \infty$, па g није диференцијабилна у $x = 0$. Кад $x \rightarrow 1+$ важи $\frac{g(x) - g(0)}{x - 1} = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \rightarrow \infty$, па g није диференцијабилна у $x = 1$.

8. Ако је $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$, наћи $f^{(2017)}(x)$.

Решење. Како је $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos x \sin 3x - \cos 3x \sin 3x) = \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x)$, следи $f^{(2017)}(x) = \frac{1}{4}(2^{2017} \cos 2x + 4^{2017} \cos 4x - 6^{2017} \cos 6x) = 2^{2015} \cos 2x + 4^{2016} \cos 4x - 9 \cdot 6^{2015} \cos 6x$.

9. Нека је $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = (1 - x)^{-y} e^{-yx}$. Доказати да је

$$(1 - x)f^{(n+1)}(x) - (n + yx)f^{(n)}(x) - nyf^{(n-1)}(x) = 0$$

за $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ (сматра се да је $f^{(0)}(x) = f(x)$).

Решење. Ако су u и v бесконачно диференцијабилне функције, важи $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$ за $n \in \mathbb{N}$ (Лајбница формула). Заиста, тврђење је тачно за $n = 1$ (тада гласи $(uv)' = u'v + uv'$). Ако је тврђење

тачно за неко n , следи

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k+1)} v^{(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k+1)} \\&= \binom{n}{0} u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \binom{n}{n} u^{(0)} v^{(n+1)} \\&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)},\end{aligned}$$

тј. тражени резултат за $n+1$, па је доказ тврђења следи индукцијом. Како је $f'(x) = y(1-x)^{-y-1}e^{-yx} - y(1-x)^{-y}e^{-yx} = y(1-x)^{-y-1}e^{-yx}(1 - (1-x)) = xy(1-x)^{-y-1}e^{-yx}$ за $x \neq 1$, следи да је $(1-x)f'(x) = xyf(x)$ за $x \neq 1$. Применом Лајбницевог формуле, како је $(1-x)^{(k)} = 0 = (xy)^{(k)}$ за $k \geq 2$, следи $(1-x)f^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) = xyf^{(n)}(x) + nyf^{(n-1)}(x)$, одакле се добија тврђење задатка.

10. Нека је $k \in \mathbb{R}$ и функција $y(x)$ дата параметарски са $x = \sin t$, $y = \sin kt$, $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Доказати да важи $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0$.

Решење. Функција је добро дефинисана ($x(t)$ је строго монотона, па има инверзну), $x(t)$ и $y(t)$ су два пута диференцијабилне и важи $x'(t) = \cos t$, $x''(t) = -\sin t$, $y'(t) = k \cos kt$, $y''(t) = -k^2 \sin kt$, па следи $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{k \cos kt}{\cos t}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3} = \frac{-k^2 \cos t \sin kt + k \sin t \cos kt}{\cos^3 t}$, одакле је

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y &= (1-\sin^2 t) \cdot \frac{-k^2 \cos t \sin kt + k \sin t \cos kt}{\cos^3 t} \\&\quad - \sin t \cdot \frac{k \cos kt}{\cos t} + k^2 \sin kt = 0.\end{aligned}$$

11. Ако је $f(x) = x^{2014}e^{\frac{1}{x}}$ за $x \neq 0$, израчунати $f^{(2015)}(x)$.

Решење. Ако је $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ за $x \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ (сматра се да је $x^0 \equiv 1$), онда је $f_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}}$. Заиста, како је $(e^{\frac{1}{x}})' = -x^{-2}e^{\frac{1}{x}}$, следи тврђење за $n=1$; ако је тачно тврђење за неко $n \in \mathbb{N}$, следи $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xf_n(x))^{(n+1)} = x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) = x \cdot ((-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}})' + (n+1)(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} = x \cdot ((-1)^{n+1}(n+1)x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}} + (-1)^n x^{-n-1} \cdot (-x^{-2}e^{\frac{1}{x}})) + (n+1)(-1)^n x^{-n-1}e^{\frac{1}{x}} = (-1)^{n+1}x^{-n-2}e^{\frac{1}{x}}$, што је тврђење за $n+1$, па је горње тврђење доказано индукцијом. За $n=2015$ следи $f^{(2015)}(x) = f_{2015}^{(2015)}(x) = (-1)^{2015}x^{-2016}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2016}}$.

12. Нека је f диференцијабилна функција на $\mathbb{R}$. Да ли су услови

$$„f(x) = o(x^2), \text{ кад } x \rightarrow 0” \quad \text{и} \quad „f(x) = 0 \wedge f'(x) = o(x), \text{ кад } x \rightarrow 0”$$

еквивалентни?

Решење. Ако је испуњен други услов, следи $f'(0) = 0$, па $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi_x) = o(x)$ кад $x \rightarrow 0$ (пошто је $|\xi_x| < |x|$, па $x \rightarrow 0$ повлачи $\xi_x \rightarrow 0$), па је $f(x) = o(x^2)$ кад $x \rightarrow 0$ (тј. други услов повлачи први).

Ако је $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{5}{2}} \sin \frac{1}{x}, & \text{за } x \neq 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \end{cases}$, важи $\frac{f(x)-f(0)}{x^2} \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, тј. $f(x) = o(x^2)$ кад $x \rightarrow 0$. Како је $f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}$ за $x \neq 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} = 0$ и $\frac{f'(x)}{x} = \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x} \not\rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$, следи да је испуњен први услов, а није други (па први услов не повлачи други).

13. Доказати да функција $f(x) = \operatorname{arctg} \ln^2 x$ има две превојне тачке у интервалу $(0, 1)$ и једну у интервалу $(1, 2)$.

Решење. Домен функције је $(0, \infty)$, на њему је функција бесконачно диференцијабилна (па су превојне тачке оне у којима други извод мења знак). Важи $f(x) = 0$ ако и само ако је $\ln x = 0$, тј. ако и само ако је $x = 1$. Такође је $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x(1+\ln^4 x)}$ и $f''(x) = \frac{1}{x^2(1+\ln^4 x)^2} \cdot \left[\frac{2}{x} \cdot x(\ln^4 x + 1) - 2 \ln x \cdot (1 + \ln^4 x + x \cdot 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}) \right] = -\frac{2}{x^2(1+\ln^4 x)^2} \cdot (\ln x + 1) \cdot (\ln^4 x + 2 \ln^3 x - 2 \ln^2 x + 2 \ln x - 1)$.

Ако је $g(t) = t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 1$, следи $g'(t) = 4t^3 + 6t^2 - 4t + 2$ и $g''(t) = 12t^2 + 12t - 4 = 3\left(t - \frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right)\left(t - \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$, следи да $g'(x)$ расте на $\left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right)$ и на $\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}, \infty\right)$, а опада на $\left(\frac{-3-\sqrt{21}}{6}, \frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right)$, а важи и $-2 < \frac{-3-\sqrt{21}}{6} < \frac{-3+\sqrt{21}}{6} < 1$. Како је $g'(-3) = -40 < 0$, $g'(-2) = 2 > 0$, $g'(t) = \frac{1}{2} \cdot t g''(t) + \frac{1}{4} \cdot g''(t) + 4 - t$, па је $g'\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{6}\right) = 4 - \frac{-3+\sqrt{21}}{6} > 0$, следи да $g'(t)$ има тачно једну нулу, γ , за коју је $\gamma \in (-3, -2)$ и важи $g'(t) < 0$ за $t \in (-\infty, \gamma)$ и $g'(t) > 0$ за $t \in (\gamma, \infty)$.

Дакле, $g(t)$ опада на $(-\infty, \gamma)$, а расте на (γ, ∞) , а како је $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \infty = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ и $g(0) = -1 < 0$, функција $g(t)$ има тачно две нуле $\alpha < \beta$ (и у тим нулама $g(t)$ мења знак). Како је $g(0) = -1 < 0$, следи $\alpha \in (-\infty, 0)$, а како је $g(0) = -1 < 0$ и $g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{26}{625} > 0$, следи $\beta \in \left(0, \frac{3}{5}\right) \subseteq (0, \ln 2)$.

Из претходног следи да $f''(x)$ има три нуле, e^α , $\frac{1}{e}$ и e^β . У свакој од тих нула $f''(x)$ мења знак (па су у питању превојне тачке) и важи $e^\alpha, \frac{1}{e} \in (0, 1)$ и $e^\beta \in (1, 2)$.

14. Одредити број решења једначине $80\,000x^3 - 8\,000x^2 + 200x - 1 = 0$ у скупу реалних бројева.

Решење. Нека је $f(x) = 80\,000x^3 - 8\,000x^2 + 200x - 1$. Како је $f'(x) = 200(20x-1)(60x-1)$, следи да f расте на $(-\infty, \frac{1}{60})$ и на $(\frac{1}{20}, \infty)$, а опада

на $(\frac{1}{60}, \frac{1}{20})$. Пошто је $f(\frac{1}{60}) = \frac{13}{17} > 0$, $f(\frac{1}{20}) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и f непрекидна функција (полином), следи да једначина $f(x) = 0$ има бар по једно решење на интервалима $(-\infty, \frac{1}{60})$, $(\frac{1}{60}, \frac{1}{20})$ и $(\frac{1}{20}, \infty)$. Са друге стране, полиномска једначина не може имати више решења од њеног степена, па дата једначина има тачно три реална решења.

15. Одредити број реалних решења једначине $x^3 = 6 \arctg x + 1$.

Решење. Нека је $f(x) = x^3 - 6 \arctg x - 1$. Функција f је непрекидна на $\mathbb{R}$, а важи и

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{6}{1+x^2} = \frac{3(x^4 + x^2 - 2)}{1+x^2} = \frac{3(x-1)(x+1)(x^2+2)}{1+x^2}.$$

Следи, функција строго расте на $(-\infty, -1)$, па како је непрекидна, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ и $f(-1) = -2 + \frac{3\pi}{2} > 0$, има тачно једну нулу на том интервалу; функција строго опада на $(-1, 1)$, па како је непрекидна, $f(-1) = -2 + \frac{3\pi}{2} > 0$ и $f(1) = -\frac{3\pi}{2} < 0$, има тачно једну нулу на овом интервалу; функција строго расте на $(1, \infty)$, па како је непрекидна, $f(1) = -\frac{3\pi}{2} < 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, има тачно једну нулу на овом интервалу.

Дакле, f има тачно три нуле на $\mathbb{R}$, тј. број реалних решења дате једначине је 3.

16. Доказати да једначина $\arcsin x = ax$ има тачно три решења ако и само ако је $a \in (1, \frac{\pi}{2}]$.

Решење. Функција $\arcsin x$ је дефинисана на $[-1, 1]$ и строго конвексна на $[0, 1]$, па права $y = kx$ може имати највише две заједничке тачке са графиком ове функције. Притом је једна заједничка тачка пресека графика $(0, 0)$. Како је $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ и $(\arcsin x)'(0) = (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})'(0) = 1$ (тј. права $y = x$ је тангента графика функције $\arcsin x$ у $(0, 0)$), следи:

- (а) ако је $a > \frac{\pi}{2}$ нема пресека уочених графика на $(0, 1]$;
- (б) ако је $a < 1$ нема пресека уочених графика на $(0, 1]$;
- (в) ако је $1 < a \leq \frac{\pi}{2}$, може постојати највише један пресек на $(0, 1]$, а како је функција $f(x) = ax - \arcsin x$ непрекидна на $(0, 1)$, $f(x) \sim (a-1)x$ кад $x \rightarrow 0$ (па у околини нуле узима позитивне вредности) и $f(1) = a - \frac{\pi}{2} \leq 0$, следи да постоји тачно један пресек на $(0, 1]$.

Функција $f(x)$ је непарна, па има једнак број нула на $(0, 1]$ и на $[-1, 0)$. Како њеним нулама одговарају решења уочене једначине, следи да једначина има три решења ако и само ако је $a \in (1, \frac{\pi}{2}]$.

17. Одредити супремум и инфимум вредности реалног параметра α за које пресек тангенте на функцију $f(x) = e^{\alpha x}$ у тачки $x = 1$ са y -осом

припада слици функције $g(t) = 3t^2 + 6t$ на $[0, 2]$. Да ли скуп оваквих α има минимум и максимум?

Решење. Функција f је глатка. Тражена тангента садржи $(1, e^\alpha)$ и има коефицијент нагиба $f'(1)$. Како је $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, следи да је тражена тангента $y = \alpha e^\alpha (x - 1) + e^\alpha$, а њен пресек са y -осом је $(0, (1 - \alpha)e^\alpha)$.

Функција g је глатка, важи $g'(t) = 6t + 6$, па g расте на $[0, 2]$. Следи да је њена слика $[g(0), g(2)] = [0, 24]$. По условима задатка важи $h(\alpha) = (1 - \alpha)e^\alpha \in [0, 24]$. Како је $h'(\alpha) = -\alpha e^\alpha$, следи да h расте на $(-\infty, 0)$, а опада на $(0, \infty)$, а како је $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} h(\alpha) = 0$, $h(0) = 1$ и $h(1) = 0$, следи да је тражени скуп $(-\infty, 1]$. Овај скуп нема минимум, а има максимум.

18. Доказати да за $x > 0$ важи $x \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} > -1$.

Решење. Нека је $g(x) = \ln x - \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) + \frac{1}{x}$. Функција $g(x)$ и израз у датој неједнакости су дефинисани за $x > 0$ и дата неједнакост је еквивалентна са $g(x) > 0$. Пошто је $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x} - \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{1 - (1 + x^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{x^2} \cdot (x - 1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - x) = \frac{x - \sqrt{1 + x^2}}{x^2 \cdot \sqrt{1 + x^2}} < 0$, функција $g(x)$ опада. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(\frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}) + \frac{1}{x}] = 0$, следи $g(x) > 0$.

19. Одредити супремум и инфимум функције $f(x) = x^x$ на $(0, \infty)$.

Решење. Функција x^x је дефинисана на датом скупу, а функција e^x је непрекидна на $\mathbb{R}$, па важи:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x^x &= e^{\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = 1, \text{ јер је} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \frac{\infty}{\infty} \\ \ln x \text{ и } \frac{1}{x} \text{ су диференцијабилне и } (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Како је $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot (\ln x + 1)$, следи да $f(x)$ опада на $(0, \frac{1}{e})$, а расте на $(\frac{1}{e}, \infty)$. Следи, супремум дате функције на $(0, \infty)$ је ∞ , а инфимум $f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}}$.

20. Одредити све $a > 0$ за које важи $x^a \leq a^x$ за свако $x \in (0, \infty)$.

Решење. За $a, x \in (0, \infty)$ дефинисани су и x^a и a^x и добијена неједнакост је еквивалентна са $x^{\frac{1}{x}} \leq a^{\frac{1}{a}}$. Ако је $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, важи

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, $f'(x) = x^{\frac{1}{e}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$, па f расте на $(0, e)$, а опада на (e, ∞) и за $x = e$ достиже строги локални максимум. Следи да је једино такво $a = e$.

21. Одредити однос полупречника основе и висине правог ваљка, који при датој запремини има најмању површину.

Решење. Ако је r полупречник основе, а h висина ваљка, по условима задатка је $r^2 \pi h = V = \text{const}$, одакле је $h = \frac{V}{r^2 \pi}$, где је $r \in (0, \infty)$, па је површина ваљка $P(r) = 2r\pi(r + h) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{r\pi}\right)$. Како је $P'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{V}{r^2\pi}\right) = \frac{4\pi}{r^2} \cdot \left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right)$, то $P(r)$ опада на $\left(0, \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$, а расте на $\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \infty\right)$. Следи да $P(r)$ минимум достиже за $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ и онда је $\frac{r}{h} = \frac{r}{\frac{V}{r^2\pi}} = \frac{r^3\pi}{V} = \frac{\frac{V}{2\pi} \cdot \pi}{V} = \frac{1}{2}$.

22. Нека је $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ полином трећег степена, који има три реалне, међусобно различите нуле. Израчунати број реалних решења једначине $(p'(x))^2 - 2p(x) \cdot p''(x) = 0$.

Решење. Нека је $q(x) = (p'(x))^2 - 2p(x) \cdot p''(x)$ и нека су $a < b < c$ нуле полинома p . Онда је $q(x)$ полином највише четвртог степена ($p'(x)$ је другог, а $p''(x)$ првог степена). Ако је $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $A \neq 0$, коефицијент уз x^4 у $q(x)$ износи $(3A)^2 - 2 \cdot A \cdot 6A = -3A^2 < 0$ (јер је коефицијент уз x^2 у $p'(x)$ једнак $3A$, а уз x у $p''(x)$ једнак $6A$). Следи $\deg(q(x)) = 4$ и важи $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) = -\infty$. Како је функција $q(x)$ диференцијабилна (она је полином) и како важи $q'(x) = 2p'(x)p''(x) - 2p'(x)p''(x) - 2p(x)p'''(x) = -2p(x)p'''(x)$, $p'''(x) = 6A \neq 0$, следи да су нуле $q'(x)$ управо нуле $p(x)$, тј. a, b и c . Дакле, функција $q(x)$ је монотона на сваком од интервала $(-\infty, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, \infty)$. Како $p(x)$ нема вишеструких нула, то је $p'(a) \neq 0$, па је $q(a) = (p'(a))^2 - 2p(a)p''(a) > 0$. Аналогно се добија да је $q(b) > 0$ и $q(c) > 0$.

Дакле, вредности функције $q(x)$ у крајевима интервала $[a, b]$ и $[b, c]$ су позитивне, а како је она монотона на овим интервалима, следи да на њима нема нула.

На $(-\infty, a]$ функција $q(x)$ је непрекидна и расте, и важи $q(a) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = -\infty$, па постоји једна нула на овом интервалу. Аналогно, функција $q(x)$ има једну нулу на интервалу $[c, \infty)$.

Дакле, број решења једначине $q(x) = 0$ је два.

23. (а) Ако су све нуле полиномске функције $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ реалне, доказати да су реалне и све нуле свих њених извода.

(б) Да ли су сва решења једначине $x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, где је $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ и $5a_3 - 2a_4^2 > 0$ реална?

Решење. (а) Ако су све нуле полиномске функције $p(x) = a_nx^n + \dots + a_0$,

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ реалне, важи $p(x) = a_n \cdot (x - b_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - b_k)^{\alpha_k}$, где су $b_1, \dots, b_k$ нуле датог полинома, а $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ њихове вишеструкости (како су све нуле датог полинома реалне, важи $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n$).

Следи да важи $p(x) = (x - b_i)^{\alpha_i} \cdot q_i(x)$ за $1 \leq i \leq k$, где је $q_i(b_i) \neq 0$. Пошто је $p'(x) = \alpha_i \cdot (x - b_i)^{\alpha_i-1} \cdot q_i(x) + (x - b_i)^{\alpha_i} \cdot q_i'(x) = (x - b_i)^{\alpha_i-1} \cdot [q_i(x) + (x - b_i) \cdot q_i'(x)]$, ако је b_i нула полинома p вишеструкости α_i , тада је b_i нула полинома p' вишеструкости $\alpha_i - 1$ (не веће, јер је $q_i(b_i) + (b_i - b_i) \cdot q_i'(b_i) = q_i(b_i) \neq 0$).

Полиномска функција је непрекидна и диференцијабилна на $\mathbb{R}$. Специјално, функција p задовољава услове Ролове теореме на $[b_i, b_{i+1}]$ за $1 \leq i \leq k-1$ (тј. непрекидна на $[b_i, b_{i+1}]$, диференцијабилна на (b_i, b_{i+1}) и $p(b_i) = p(b_{i+1}) = 0$), па постоји $c_i \in (b_i, b_{i+1})$, тако да је $p'(c_i) = 0$ за $1 \leq i \leq k-1$.

Дакле, функција p' има барем $k-1 + \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_i - 1) = k-1 + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i - k = k-1 + n - k = n-1$ реалних нула (рачунајући и вишеструкости). Како је p' полином степена $n-1$, не може имати више од $n-1$ реалне нуле. Дакле, p' има $n-1$ реалних нула.

(б) Нека је $p(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и нека су сва решења једначине $p(x) = 0$ реална. Применом тврђења из (а) следи да једначине $p'(x) = 0$, $p''(x) = 0$, $p'''(x) = 0$ имају реална решења. Како је $p'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot x^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_4 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 6 \cdot (10 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x + a_3)$, квадратна једначина $10 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x + a_3 = 0$ има реална решења, тј. њена дискриминанта је ненегативна. Следи $0 \leq (4a_4)^2 - 4 \cdot 10 \cdot a_3 = 8 \cdot (2a_4^2 - 5a_3)$, што је у контрадикцији са условима задатка. Одавде следи тврђење задатка.

24. Одредити све непрекидне функције $f : [0, \infty) \xrightarrow{\text{на}} [0, \infty)$ које испуњавају услов $f'(x) \cdot f''(x) = \frac{1}{2}$ за $x > 0, x \neq 1$.

Решење. Дати услов је еквивалентан са $((f')^2)' = 1$ за $(0, 1) \cup (1, \infty)$, одакле је $(f')^2 = x + B_x$, где је $B_x \in \mathbb{R}$ и $x + B_x \geq 0$. Притом је B_x константно на свакој компоненти повезаности скупа на коме је f диференцијабилна. Даље, следи $f(x) = \frac{2}{3} \cdot (x + B_x)^{\frac{3}{2}} + C_x$ или $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x + B_x)^{\frac{3}{2}} + C_x$ за свако $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, где је $C_x \in \mathbb{R}$. Због непрекидности C_x мора бити константно на свакој компоненти повезаности датог скупа. Дакле, постоје $D, E, F, G \in \mathbb{R}$, тако да важи $B_x = D, C_x = E$ за свако $x \in (0, 1)$ и $B_x = F, C_x = G$ за свако $x \in (1, \infty)$. Како је функција f непрекидна, скуп $f([0, 1])$ је ограничен (непрекидна слика компакта је компакт). Следи, ако је функција сурјекција на $[0, \infty)$, мора расти на скупу $(1, \infty)$. Следи

$$f(x) = \begin{cases} \pm \frac{2}{3} \cdot (x + D)^{\frac{3}{2}} + E, & \text{за } x \in (0, 1) \\ \pm \frac{2}{3} \cdot (x + F)^{\frac{3}{2}} + G, & \text{за } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Ако у горњем представљању функције f на скупу $(0, 1)$ важи $f(x) =$

$\frac{2}{3} \cdot (x+D)^{\frac{3}{2}} + E$, следи да f расте и на $[0, 1]$ и на $[1, \infty)$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{2}{3} \cdot D^{\frac{3}{2}} + E$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \frac{2}{3} \cdot (1+D)^{\frac{3}{2}} + E$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{2}{3} \cdot (1+F)^{\frac{3}{2}} + G$, следи $D^{\frac{3}{2}} + E = 0$ (најмања вредност коју узима функција f), $\frac{2}{3} \cdot (1+D)^{\frac{3}{2}} + E = \frac{2}{3} \cdot (1+F)^{\frac{3}{2}} + G$, при $D \geq 0$, $F \geq -1$.

Дакле, $D = E$ (непрекидност за $x = 1$), за $D \geq 0$, $G \geq -1$, једна класа решења је

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+D)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot D^{\frac{3}{2}}, & \text{за } x \in (0, 1] \\ \frac{2}{3}(x+F)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+F)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(1+D)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot D^{\frac{3}{2}}, & \text{за } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Ако у горњем представљању функције f на скупу $(0, 1)$ важи $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x+D)^{\frac{3}{2}} + E$, следи да f опада на $[0, 1]$, а расте на $[1, \infty)$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\frac{2}{3} \cdot D^{\frac{3}{2}} + E$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (1+D)^{\frac{3}{2}} + E$, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{2}{3} \cdot (1+F)^{\frac{3}{2}} + G$, следи $-\frac{2}{3} \cdot (1+D)^{\frac{3}{2}} + E = \frac{2}{3} \cdot (1+F)^{\frac{3}{2}} + G = 0$ (најмања вредност коју узима функција f и непрекидност за $x = 1$), тј. за $D \geq 0$, $F \geq -1$ се добија још једна класа решења:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot (x+D)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot (1+D)^{\frac{3}{2}}, & \text{за } x \in (0, 1] \\ \frac{2}{3} \cdot (x+F)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot (1+F)^{\frac{3}{2}}, & \text{за } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

25. Нека је p полином четвртог степена, за који важи $p(2) = -1$, $p'(2) = 0$, $p''(2) = 2$, $p'''(2) = -12$, $p^{(4)}(2) = 24$. Израчунати

(а) $p(-1)$; (б) $p'(0)$; (в) $p''(1)$;

Решење. Полином четвртог степена се поклапа са својим развојем у Тејлоров ред до четвртог степена (око произвољне тачке), па је $p(x) = p(2) + \frac{p'(2)}{1!} \cdot (x-2) + \frac{p''(2)}{2!} \cdot (x-2)^2 + \frac{p'''(2)}{3!} \cdot (x-2)^3 + \frac{p^{(4)}(2)}{4!} \cdot (x-2)^4 = -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4$. Следи:

(а) $p(-1) = -1 + (-3)^2 - 2(-3)^3 + (-3)^4 = 143$;

(б) $p'(x) = 2(x-2) - 6(x-2)^2 + 4(x-2)^3$, па је $p'(0) = 2 \cdot (-2) - 6 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2)^3 = -60$;

(в) $p''(x) = 2 - 12(x-2) + 12(x-2)^2$, па је $p''(1) = 2 - 12 \cdot (-1) + 12 \cdot (-1)^2 = 26$.

26. Одредити константе α, β, γ и δ , тако да израз $\frac{1 + \alpha x + \beta x^2}{1 + \gamma x + \delta x^2}$ најбоље апроксимира функцију $\cos x$ у околини нуле.

Решење. Да би апроксимација била најбоља, потребно је да се што више почетних чланова у Маклореновом развоју функција $\cos x$ и $\frac{1 + \alpha x + \beta x^2}{1 + \gamma x + \delta x^2}$ поклапа. Због парности је $\alpha = \gamma = 0$. Како је $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ и $\frac{1 + \beta x^2}{1 + \delta x^2} = (1 + \beta x^2)(1 - \delta x^2 + \delta^2 x^4 + o(x^4)) = 1 + (\beta - \delta)x^2 + \delta(\delta - \beta)x^4 + o(x^4)$ кад $x \rightarrow 0$, следи $\beta - \delta = -\frac{1}{2}$ и $\delta(\delta - \beta) = \frac{1}{24}$, одакле је $\beta = -\frac{5}{12}$ и $\delta = \frac{1}{12}$.

27. Нека су $a, k, m \in \mathbb{R}$ и f, g, h два пута диференцијабилне функције на $\mathbb{R}$. Доказати:

(а) Ако је $f''(x) > 0$ за $x > a$ и $f'(b) > 0$ за неко $b > a$, онда је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(б) Ако је $g'(x) \leq -\delta$ за $x > a$, где је $\delta > 0$, онда је $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$.

(в) Ако је $h''(x) > 0$ за $x > a$ и $\varphi(x) = kx + m$ коса асимптота функције h када $x \rightarrow \infty$, онда је $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = k$.

Решење. (а) За $x > b$, по Лагранжовој теореме је $f(x) - f(b) = f'(\xi)(x - b)$ за неко $\xi \in (b, x)$. Како је $f''(x) > 0$ за $x > a$, следи да $f'(x)$ расте на (a, ∞) , па је $f'(\xi) \geq f'(b)$. Следи, за свако $x \in (b, \infty)$ важи $f(x) \geq f(b) + f'(b)(x - b)$, а како $f(b) + f'(b)(x - b) \rightarrow \infty$ кад $x \rightarrow \infty$, следи тврђење.

(б) По Лагранжовој теореме, за $x > a$ постоји $\xi \in (a, x)$, тако да је $g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a) \leq -\delta(x - a)$, па како $g(a) - \delta(x - a) \rightarrow -\infty$ кад $x \rightarrow \infty$, следи тврђење.

(в) Ако је $r(x) = h(x) - \varphi(x)$, следи $r''(x) = h''(x) > 0$ и $r(x)$ има хоризонталну асимптоту $y = 0$ кад $x \rightarrow \infty$. По делу (а) следи да је $r'(x) \leq 0$, а како је $r''(x) > 0$, функција $r'(x)$ је растућа, па како је и ограничена, постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} r'(x) \leq 0$. Међутим, како $r(x)$ има хоризонталну асимптоту, по делу (б) та гранична вредност мора бити 0, тј. $\lim_{x \rightarrow \infty} r'(x) = 0$, одакле следи $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = k$.

28. Нека је $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - 2|x| + 1)$. Да ли је скуп

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid \left(f(x) - \frac{\pi x}{4} \right) (1 - x) < 0 \right\}$$

неповезан у $\mathbb{R}^2$ (тј. може ли се приказати као унија два непразна отворено-затворена подскупа)?

Решење. Функција је дефинисана, непрекидна на $\mathbb{R}$, диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. За $x > 0$ је $f(x) = \operatorname{arctg}(2x^2 - 2x + 1)$ и

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2x^2 - 2x + 1)^2} \cdot (4x - 2) = \frac{2(2x - 1)}{1 + (2x^2 - 2x + 1)^2},$$

па је $f'(1) = 1$.

Ако је $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid \left(f(x) - \frac{\pi x}{4} \right) (1 - x) < 0 \right\}$, $A = S \cap (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$, $B = S \cap (1, \infty) \times \mathbb{R}$, како скуп S не садржи ниједну тачку облика $(1, y)$, где је $y \in \mathbb{R}$, следи $A \cup B = S$. Скупови A и B су отворени у S , јер настају у пресеку скупа S и отворених скупова $(-\infty, 1) \times \mathbb{R}$ и $(1, \infty) \times \mathbb{R}$. По Тејлоровој формули, важи $f(x) - \frac{\pi}{4} \cdot x = f(1) + f'(1)(x - 1) + o(x - 1) - \frac{\pi}{4} \cdot x = \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) (x - 1) + o(x - 1)$. Како је $1 - \frac{\pi}{4} > 0$, постоје $x_1 < 1, x_2 > 1$, тако да важи $f(x_1) - \frac{\pi}{4} \cdot x_1 < 0$ и $f(x_2) - \frac{\pi}{4} \cdot x_2 > 0$. Следи, $(x_1, 0) \in A$, $(x_2, 2) \in B$,

па су скупови A и B непразни. Дакле, A и B чине дисјунктну поделу скупа S на непразне отворене скупове, па скуп S није повезан.

29. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ четири пута диференцијабилна, $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in (0, 1)$ тако да је $f^{(4)}(\xi) = 0$.

Решење. Функције f, f', f'', f''' задовољавају услове Лагранжове теореме на сваком подинтервалу интервала $[0, 1]$. Како је $f(0) = f(1) = 0$, следи да постоји $a \in (0, 1)$ тако да је $f'(a) = 0$. Како је $f'(0) = f'(a) = 0$ и $f'(a) = f'(1) = 0$, следи да постоје $b_1 \in (0, a)$ и $b_2 \in (a, 1)$ тако да је $f''(b_1) = f''(b_2) = 0$. Како је $f''(b_1) = f''(b_2) = 0$ и $f''(b_2) = f''(1) = 0$, следи да постоје $c_1 \in (b_1, b_2)$ и $c_2 \in (b_2, 1)$ тако да је $f'''(c_1) = f'''(c_2) = 0$, па постоји $\xi \in (c_1, c_2)$ тако да је $f^{(4)}(\xi) = 0$.

30. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је два пута диференцијабилна на (a, b) . Ако f има три различите нуле у $[a, b]$, доказати да постоји $c \in [a, b]$ такво да је $9f(c) + f''(c) = 6f'(c)$.

Решење. Нека су $n_1 < n_2 < n_3$ нуле функције f . Функција $g(x) = e^{-3x}f(x)$ је непрекидна на $[a, b]$, два пута диференцијабилна на (a, b) и важи $g(n_1) = g(n_2) = g(n_3) = 0$, па по Роловој теореме следи да постоје $m_1 \in (n_1, n_2)$ и $m_2 \in (n_2, n_3)$ тако да је $g'(m_1) = g'(m_2) = 0$. Следи да функција g' задовољава услове Ролове теореме на $[m_1, m_2]$, па постоји $c \in [m_1, m_2] \subset [a, b]$ тако да је $g''(c) = 0$. Како је $g''(x) = 9e^{-3x}f(x) - 6e^{-3x}f'(x) + e^{-3x}f''(x)$, следи да је $e^{-3c}(9f(c) - 6f'(c) + f''(c)) = 0$, па како је $e^{-3c} \neq 0$, следи тврђење задатка.

31. Нека су реалне функције f и g непрекидне на $[0, 1]$, диференцијабилне на $(0, 1)$ и важи $f(0) = f(1) < 0$, $3f'(x)g(x) + 11f(x)g'(x) \geq 0$ за $0 < x < 1$. Доказати да важи $g(1) \leq g(0)$.

Решење. Нека је $h(x) = (f(x))^3 \cdot (g(x))^{11}$ за $x \in [0, 1]$. Функција $h(x)$ је непрекидна на $[0, 1]$ (као композиција непрекидних функција на $[0, 1]$) и диференцијабилна на $(0, 1)$ (као композиција диференцијабилних функција на $(0, 1)$). Следи да је $(h(x))' = 3 \cdot (f(x))^2 \cdot f'(x) \cdot (g(x))^{11} + 11 \cdot (f(x))^3 \cdot (g(x))^{10} \cdot g'(x) = (f(x))^2 \cdot (g(x))^{10} \cdot [3f'(x)g(x) + 11f(x)g'(x)] \geq 0$, тј. функција $h(x)$ је неоппадајућа. Следи $h(1) \geq h(0) \Leftrightarrow (f(1))^3 \cdot (g(1))^{11} \geq (f(0))^3 \cdot (g(0))^{11}$. Како је $f(0) = f(1) < 0$, следи $(f(0))^3 = (f(1))^3 < 0$, тј. $(g(1))^{11} \leq (g(0))^{11}$. Како је функција x^{11} растућа, следи $g(1) \leq g(0)$, што је и требало доказати.

32. Нека је функција f диференцијабилна на $\mathbb{R}$, $a < 0$ и важи $f(a) = 0$. Доказати да постоји $b < 0$ такво да важи $f(b) + 3bf'(b) = 0$.

Решење. Нека је $g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(x)$. Функција g је непрекидна на $\mathbb{R}$ (као композиција непрекидних функција на $\mathbb{R}$) и диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (као композиција диференцијабилних функција на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Како

је $g(a) = g(0) = 0$, по претходном следи да g задовољава услове Ролове теореме на $[a, 0]$, тј. постоји $b \in (a, 0) \subseteq \mathbb{R}^-$ тако да важи $0 = g'(b) = \frac{1}{3 \cdot b^{\frac{2}{3}}} \cdot f(b) + b^{\frac{1}{3}} \cdot f'(b)$, тј. $f(b) + 3bf'(b) = 0$, што је тврђење задатка.

33. Нека је функција f диференцијабилна на $(0, 1)$, непрекидна на $[0, 1]$ и важи $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказати да постоји $c \in (0, 1)$, тако да важи $f'(c) = \frac{\pi}{8} \cdot \left((f(c))^3 + \frac{1}{f(c)} \right)$.

Решење. Нека је $g(x) = \arctg(f(x))^2 - \frac{\pi}{4} \cdot x$. Функција g је непрекидна на $[0, 1]$ (као композиција непрекидних функција на том интервалу) и диференцијабилна на $(0, 1)$ (као композиција диференцијабилних функција на том интервалу), а како је $g(0) = g(1) = 0$, задовољава услове Ролове теореме. Следи да постоји $c \in (0, 1)$, тако да важи $0 = g'(c) = \frac{2f(c)f'(c)}{1 + (f(c))^4} - \frac{\pi}{4}$. Из последње једнакости следи $f(c) \neq 0$, а затим и тврђење задатка.

34. Нека је функција f непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) . Доказати да постоји $c \in (a, b)$ такво да је

$$\frac{(f(b) - f(a))}{b - a} \cdot (f(b) + f(a) - 1) = f'(c) \cdot (2f(c) - 1).$$

Решење. Нека је $F(x) = f^2(x) - f(x)$. Функција F је непрекидна на $[a, b]$ и диференцијабилна на (a, b) (као композиција таквих функција), па испуњава услове Лагранжове теореме о средњој вредности. Следи да постоји $c \in (a, b)$ такво да је $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$. Како је $F(b) - F(a) = (f(b) - f(a))(f(b) + f(a) - 1)$, а $F'(x) = 2f(x)f'(x) - f'(x) = f'(x)(2f(x) - 1)$, следи тражено тврђење.

35. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилно и сурјективно пресликавање. Доказати да постоји реалан број c за који важи $f(c) + cf'(c) = 0$.

Решење. Ако је $f(0) = 0$, за $c = 0$ је испуњен тражени услов. Ако је $f(0) \neq 0$, из сурјективности функције f следи да постоји $a \in \mathbb{R}$, тако да је $f(a) = 0$. Нека је $g(x) = xf(x)$. Функција g је непрекидна и диференцијабилна на $\mathbb{R}$ (као композиција непрекидних и диференцијабилних функција) и важи $g(0) = g(a) = 0$, па испуњава услове Ролове теореме на интервалу $[0, a]$ (ако је $a > 0$) тј. на $[a, 0]$ (ако је $a < 0$). У сваком случају, следи да постоји $c \in \mathbb{R}$, тако да важи $0 = g'(c) = f(c) + cf'(c)$, што је тврђење задатка.

36. Нека је $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна, два пута диференцијабилна функција и нека је $f'(x) \neq 0$ и $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Доказати да постоји $\xi \in (0, 4)$ тако да важи $\frac{f(\xi) - f''(\xi)}{f'(\xi)} = 2 \operatorname{ctg} \xi$.

Решење. Нека је $g(x) = f(x) \cdot \sin x$ за $x \in [0, \pi]$. Функција g је непрекидна

на $[0, \frac{3}{2}]$ и $[\frac{3}{2}, \pi]$ (као композиција непрекидних) и диференцијабилна на $(0, \frac{3}{2})$ и $(\frac{3}{2}, \pi)$ (као композиција диференцијабилних), а како је и $g(0) = g(\frac{3}{2}) = g(\pi)$ задовољава услове Ролове теореме на интервалима $[0, \frac{3}{2}]$ и $[\frac{3}{2}, \pi]$. Следи да постоје $\xi_1 \in (0, \frac{3}{2})$ и $\xi_2 \in (\frac{3}{2}, \pi)$, тако да важи $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. Функција g' задовољава услове Ролове теореме на интервалу $[\xi_1, \xi_2]$ (како је f два пута диференцијабилна на $(0, \pi)$), следи да је f' непрекидна и диференцијабилна на сваком подинтервалу, а одатле следи исто и за g' , па постоји $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, тако да важи $0 = g''(\xi) = (f(x) \sin x)''(\xi) = f''(\xi) \sin \xi + 2f'(\xi) \cos \xi - f(\xi) \sin \xi$. Како је $f'(x) \neq 0$ и $\sin x \neq 0$ за $x \in (0, \pi)$, следи тврђење задатка.

37. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и функције f и g непрекидне на $[a, b]$ и диференцијабилне на (a, b) , такве да важи $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за $x \in [a, b]$. Доказати да постоји $c \in (a, b)$, такво да важи $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

Решење. Нека је $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. По условима задатка h је добро дефинисана, непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и важи $h(a) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)} = h(b)$, тј. h задовољава услове Ролове теореме. Дакле, постоји $c \in (a, b)$ за које важи $0 = h'(c) = \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$, одакле следи тврђење задатка.

38. Нека је функција f $n+1$ пута диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x) \neq 0$. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

(а) Доказати да важи $\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} > 0$.

(б) Ако је $\ln \frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} = b - a$, доказати да постоји $c \in (a, b)$ тако да важи $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

Решење. (а) Како је функција f $n+1$ пута диференцијабилна, дефинисано је $g(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x)$ за $x \in \mathbb{R}$ и g је непрекидна (чак и диференцијабилна, као композиција диференцијабилних функција). Како непрекидна функција слика повезан скуп у повезан скуп, ако би $g(a)$ и $g(b)$ били различитог знака, постојала би тачка $c \in (a, b)$ за коју је $g(c) = 0$, што је у контрадикцији са претпоставком задатка. Дакле, $g(a)$ и $g(b)$ су истог знака, одакле следи тврђење (а).

(б) Нека је $h(x) = \ln|g(x)| - x$ за $x \in \mathbb{R}$. Како је $g(x) \neq 0$ функција h је добро дефинисана, па из диференцијабилности g следи диференцијабилност h (као композиције-функција $|x|$ је диференцијабилна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). По (а), израз у (б) је коректно дефинисан и важи $\ln \frac{g(a)}{g(b)} = \ln \left| \frac{g(a)}{g(b)} \right| = \ln|g(a)| - \ln|g(b)|$, односно $h(a) = h(b)$. Дакле, функција h задовољава услове Ролове теореме на интервалу $[a, b]$, па постоји

$c \in (a, b)$ тако да важи $0 = h'(c) = (\ln |g(x)| - x)'(c) = \left(\frac{g'(x)}{g(x)} - 1\right)(c) = \frac{f'(c) + f''(c) + \dots + f^{(n+1)}(c)}{f(c) + f'(c) + \dots + f^{(n)}(c)} - 1$, одакле следи тврђење задатка.

39. Нека је функција f непрекидна на $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) и нека је $f(a) = a$, $f(b) = b$. Доказати да постоје s, t тако да важи $a < s < t < b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = 2$.

Решење. Како је функција f непрекидна на $[a, b]$, постоји $c \in [a, b]$ тако да важи $f(c) = \frac{a+b}{2}$ (последица Болцано–Кошијеве теореме о међувредности). Функција f је непрекидна на $[a, c]$ и на $[c, b]$, диференцијабилна на (a, c) и (c, b) , тј. задовољава услове Лагранжове теореме. Следи, постоје $s \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ и $t \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ тако да важи $f'(s) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{\frac{a+b}{2} - a}{c - a}$ и $f'(t) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{b - \frac{a+b}{2}}{b - c}$, па је $a < s < t < b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = \frac{c - a}{\frac{a+b}{2} - a} + \frac{b - c}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{c - a}{\frac{b-a}{2}} + \frac{b - c}{\frac{b-a}{2}} = 2$, одакле следи тврђење задатка.

40. (а) Нека је $f'(x) \geq (f(x))^2$ за свако $x > 0$, где $f : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$. Наћи $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(б) Да ли постоји диференцијабилна функција $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, таква да је $f'(x) \geq (f(x))^2$ за свако $x > 0$?

Решење. (а) При условима задатка, дефинисана је функција $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ (која је и диференцијабилна, као композиција диференцијабилних функција) и важи $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \leq -1$ за свако $x > 0$. Следи да функција g опада, па је или $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = r \in \mathbb{R}$. Ако би било $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = r \in \mathbb{R}$, постојао би $M \in \mathbb{R}$, тако да важи $f(x) < r + 1$ за свако $x \geq M$. Како функција g , по горе наведеном, задовољава услове Лагранжове теореме, постоји $\xi \in (M, M + 1)$, тако да важи $g'(\xi) = \frac{f(M + 1) - f(M)}{M + 1 - M} > -1$, што је контрадикција са горе добијеним условом за g' . Дакле, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, тј. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

(б) Као у (а) се показује да g опада и да не може бити $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = r \in \mathbb{R}$. Међутим, сада не може бити ни $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$ (ако је кодомен функције f једнак $(0, \infty)$, онда је и функција $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ позитивна). Дакле, не постоји функција са наведеним особинама.

41. Нека је $0 < a < b$ и f функција непрекидна на $[a, b]$ и диференција-

билна на (a, b) . Доказати да постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је

$$\frac{1}{b-a} \left| \begin{array}{cc} b & a \\ f(b) & f(a) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

Решење. По условима задатка функције $\frac{f(x)}{x}$ и $\frac{1}{x}$ су непрекидне на $[a, b]$, диференцијабилне на (a, b) и $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ за $x \in (a, b)$, па из Кошијеве теореме следи да постоји $\xi \in (a, b)$ тако да је

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = \frac{\frac{f'(\xi)}{\xi} - \frac{f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)'(\xi)}{\left(\frac{1}{x}\right)'(\xi)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

42. Нека је $f : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ диференцијабилна и сурјективна функција. Доказати да постоји $\xi \in (0, 1)$ тако да је $|f'(\xi)| > 1$.

Решење. Како је f на, следи да постоје $\alpha, \beta \in (0, 1)$ тако да је $f(\alpha) = 1$ и $f(\beta) = 0$. Како је f непрекидна на $[\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}]$ и диференцијабилна на $(\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\})$, то постоји $\xi \in (\min\{\alpha, \beta\}, \max\{\alpha, \beta\}) \subset (0, 1)$ тако да важи $|f'(\xi)| = \left| \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \right| = \frac{1}{|\alpha - \beta|} > 1$.

43. Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, где је $[0, 1] \subseteq (a, b)$ и важи $f'(0) = 1$, $f'(1) = 0$. Мора ли постојати тачка $c \in (0, 1)$ за коју важи $f'(c) = c$, уколико је:

- (а) функција f непрекидно диференцијабилна.
- (б) функција f диференцијабилна.

Решење. Нека је $g(x) = f(x) - x$. Функција g је диференцијабилна на (a, b) , као композиција диференцијабилних функција и важи $g'(0) = f'(0) - 0 = 1$ и $g'(1) = f'(1) - 1 = -1$, па по Ларбуовој теореме (ако је f диференцијабилна на (a, b) и f' узима вредности α и β ($\alpha < \beta$), онда узима и све вредности из интервала $[\alpha, \beta]$) постоји c , тако да је $0 = g'(c) = f'(c) - c$, одакле следи да тражена тачка мора постојати у оба дела задатка (део (а) се може извести и коришћењем Коши-Болцанове теореме о међувредности).

44. Нека је функција $f \in \mathcal{D}(0, 1)$. Доказати:

- (а) Ако за неке $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ важи $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ и $f(\alpha) \leq f(\beta) \geq f(\gamma)$, тада постоји $x \in (0, 1)$ за које важи $f'(x) = 0$.
- (б) Ако је f ограничена и не постоји $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, тада постоји бесконачно много тачака $x \in (0, 1)$ тако да важи $f'(x) = 0$.

Решење. Из Лагранжове теореме, примењене на $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, \gamma]$, следи да постоје ξ_1 и ξ_2 тако да је $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq 0$ и $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \leq 0$.

Ако важи једнакост у било којој од добијених једнакости, следи тврђење. Ако не, извод функције f узима и позитивне и негативне вредности, па по Дарбуовој теореме мора узимати и вредност 0.

Како ограничена и монотона функција има граничну вредност, следи да у делу (б) функција f није монотона у околини нуле, па тврђење овог дела следи директно из дела (а).

45. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, која је диференцијабилна на $(0, 1)$ и важи $f(0) = f(1) = 0$ и $f(x) \neq 0$ за $0 < x < 1$. Одредити скуп $\{(\ln|f(x)|)'\mid 0 < x < 1\}$.

Решење. Функција $g(x) = \ln|f(x)|$ за $x \in (0, 1)$ је добро дефинисана ($f(x) \neq 0$), непрекидна и диференцијабилна (f је константног знака на $(0, 1)$ —иначе би због непрекидности имала нулу) као композиција таквих функција. Даље је $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -\infty$.

Нека је $0 < a < 1$. Како је $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -\infty$, следи да за свако $M > 0$ постоји $x \in (a, 1)$, тако да је $g(x) < -M(1-a) + g(a)$. Следи да је $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq (-M) \cdot \frac{1-a}{x-a} < -M$, па (по теореме о средњој вредности) постоји $\xi \in (a, 1)$ тако да је $g'(\xi) < -M$. Како је M произвољно, g' узима произвољно мале вредности.

Аналогно, користећи да је $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -\infty$, добија се да g' узима произвољно велике вредности. Како је g диференцијабилна, по Дарбуовој теореме скуп $\{(\ln|f(x)|)'\mid 0 < x < 1\}$ је повезан, па је $\{(\ln|f(x)|)'\mid 0 < x < 1\} = \mathbb{R}$.

46. Нека је f ограничена и диференцијабилна функција на $(0, \infty)$ за коју важи $(\forall x) f(x) \cdot f'(x) \geq \cos x$. Доказати да $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ не постоји у $\mathbb{R}$.

Решење. Нека је $g(x) = (f(x))^2 - 2\sin x$. Функција g је диференцијабилна на $(0, \infty)$, као композиција диференцијабилних функција, а из $|g(x)| = |(f(x))^2 - 2\sin x| \leq |(f(x))^2| + 2$ и ограничености функције f следи ограниченост функције g . Пошто је $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2\cos x$, из услова задатка следи да важи $g'(x) \geq 0$. Дакле, функција g је ограничена и неоппадајућа, па у $\mathbb{R}$ постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$. Ако би у $\mathbb{R}$ постојао $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, тада би постојао и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2}((f(x))^2 - g(x))$, тј. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$. Како последња гранична вредност не постоји, добија се контрадикција из које следи тврђење задатка.

47. Доказати да је два пута диференцијабилна функција $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, која задовољава услов $f''(x) + e^x f(x) = 0$ за $x \in [0, \infty)$ ограничена.

Решење. Нека је $g(x) = (f(x))^2 + e^{-x}(f'(x))^2$. Функција g је диференцијабилна на $[0, \infty)$, као композиција диференцијабилних функција на истом скупу. Очигледно важи $g(x) \geq 0$. Из услова задатка следи $g'(x) = 2f(x)f'(x) + e^{-x} \cdot 2f'(x)f''(x) - e^{-x} \cdot (f'(x))^2 = 2e^{-x}f'(x) \cdot$

$(f''(x) + e^x \cdot f(x)) - e^{-x} \cdot (f'(x))^2 = -e^{-x} \cdot (f'(x))^2 \leq 0$, па је g нерастућа. Следи да је g ограничена, па како је и монотона, следи $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$, тј. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cdot (f'(x))^2 = 0$. Како је $(f(x))^2 = g(x) - g'(x)$, следи постојање $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^2$, па (због непрекидности f (диференцијабилна функција је и непрекидна)) постоји (у $\mathbb{R}$) и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, тј. f је ограничена (за ограниченост проблем настаје само око ∞ , јер је на компактном скупу слика непрекидне функције компактна, па самим тим и ограничена).

48. (а) Доказати да за свако $x > 0$ постоји јединствено $\theta = \theta(x)$, такво да важи

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{x + \theta(x)}.$$

(б) Доказати да важи $0 < \theta(x) < \frac{1}{2}$ за свако $x > 0$.

Решење. (а) За свако $x > 0$ функција $\ln x$ је непрекидна на $[x, x+1]$ и диференцијабилна на $(x, x+1)$, тј. задовољава услове Лагранжове теореме. Следи да за свако $x > 0$ постоји $\vartheta(x) \in (x, x+1)$ тако да важи $\frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = \frac{1}{\vartheta(x)}$, тј. ако је $\theta(x) = \vartheta(x) - x$, следи $0 < \theta(x) < 1$.

Како је функција $\frac{1}{x}$ строго растућа, $\theta(x)$ је једнозначно одређено.

(б) Из (а) следи $\theta(x) > 0$. За неједнакост $\theta(x) < \frac{1}{2}$ је довољно показати да за свако $x > 0$ важи $\ln(x+1) - \ln x > \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$.

Нека је $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$ ($Dom(g) = (0, \infty)$). Тада је $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2} = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{x(x+1)(x + \frac{1}{2})^2}$, па g опада. Како је $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2x}} = \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow \infty$, следи $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Следи $g(x) > 0$, одакле следи горња неједнакост.

49. Нека је $a > 0$ и $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно-диферцијабилна функција за коју важи $\frac{1}{x+2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{x+1}$ за $x > 0$. Израчунати:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x}. \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n(f(n+a) - f(n))). \quad (v) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x)).$$

Решење. (а) Како је $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ за $x > 0$, следи (Лопиталова правила) да је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}$, ако претходна гранична вре-

дност постоји. Међутим, како је $\frac{x}{x+2} = \frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x}} \leq \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \leq \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$, по теореме о два полицајца следи да она постоји и да је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$.

(б) Како је $f(n+a) - f(n) = a \cdot f'(c_n)$ за неко $c_n \in (n, n+a)$ и како је $\frac{1}{n+a+2} < \frac{1}{c_n+2} \leq f'(c_n) \leq \frac{1}{c_n+1} < \frac{1}{n+1}$, следи да је $\frac{an}{n+a+2} \leq n(f(n+a) - f(n)) \leq \frac{an}{n+1}$. Пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{n+a+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{n+1} = a$, по теореме о два полицајца следи да тражена гранична вредност постоји и важи $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(f(n+a) - f(n))) = a$.

(в) За $a = 1$ тражена гранична вредност је, тривијално, нула. Нека је $a > 1$ (случај $a < 1$ се ради аналогно). Функције f и $\ln(1+x)$ задовољавају услове Кошијеве теореме на $[x, ax]$ ($(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} > 0$), па постоји c_x у (x, ax) тако да је $\frac{f(ax) - f(x)}{\ln(1+ax) - \ln(1+x)} = \frac{f'(c_x)}{\frac{1}{c_x+1}}$. Како је $\frac{c_x+1}{c_x+2} = \frac{\frac{1}{c_x+2}}{\frac{1}{c_x+1}} \leq \frac{f'(c_x)}{\frac{1}{c_x+1}} \leq \frac{\frac{1}{c_x+1}}{\frac{1}{c_x+1}} = 1$ и како $c_x \rightarrow \infty$ кад $x \rightarrow \infty$, следи да постоји $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(c_x)}{\frac{1}{c_x+1}}$ и важи $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(c_x)}{\frac{1}{c_x+1}} = 1$, па је $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1+ax) - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1+ax}{1+x} = \ln a$ (овај резултат је тачан за свако $a > 0$).

50. Нека је $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) = \alpha e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) = 0\}$ и $S' = \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi'(x) = 0\}$. Доказати да важи

(а) $S \neq \emptyset$; (б) $S \cap S' = \emptyset$; (в) скуп S је коначан.

(г) Наћи број елемената скупа S .

Решење. За свако α и m функција φ је непрекидна (као композиција непрекидних), па како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ ($y \infty$ је e^x „јаче” од полиномне функције; $y - \infty$ је обрнуто, а од две полиномне функције „јача” је она са већим степеном).

Дакле, φ је непрекидна на $\mathbb{R}$ и узима и позитивне и негативне вредности, па по теореме о међувредности узима и вредност 0. То значи да је $S \neq \emptyset$.

Како је $\varphi(x) = \varphi'(x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ (*) за све реалне x , ако је $\beta \in S \cap S'$ следи $\frac{\beta^{2m}}{(2m)!} = 0$, тј. $\beta = 0$. Међутим, $\varphi(0) = \alpha - 1 \neq 0$, па је $S \cap S' = \emptyset$.

На основу непрекидности и граничног понашања φ , следи да је S садржан у неком компакту. Ако би било $|S| = \infty$, тада би S имао бар једну тачку нагомилавања (рецимо γ). Међутим, из Ролове теореме (φ је и диференцијабилна) следи да се између сваке две тачке из S налази тачка из S' , па је γ и тачка нагомилавања скупа S' . Следи да је и $\gamma \in S'$, јер је φ непрекидно-диференцијабилна, тј. $S \cap S' \neq \emptyset$, што је контрадикција са горе показаним.

По делу (а) скуп S ($= \varphi^{-1}(\{0\})$) је непразан, компактан, па има и садржи свој минимум (ε). Како су екстремне тачке функције φ у S' и како, по (б), ε није у S' , φ у некој десној полуоколини тачке ε узима позитивне вредности. Следи да је $S \setminus \{\varepsilon\}$ компактан, а ако би био и непразан, постојао би његов минимум $\varepsilon' \neq \varepsilon$. Следи да φ задовољава услове Ролове теореме на $[\varepsilon, \varepsilon']$, па постоји $\xi \in S'$, тако да је $\varphi(\xi) > 0$. Међутим, по (*) следи да је $\varphi(\xi) = \varphi'(\xi) - \frac{\xi^{2m}}{(2m)!} = -\frac{\xi^{2m}}{(2m)!} \leq 0$, што је контрадикција. Следи да је $|S| = 1$.

51. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција и важи $|f''(x)| \leq 1$ за $0 < x < 1$. Доказати да постоје реални бројеви a и b , тако да важи $|f(x) - ax - b| \leq \frac{1}{16}$ за свако $x \in [0, 1]$.

Решење. Како су функције $f(x)$ и $f(x) - cx - d$, $c, d \in \mathbb{R}$, два пута диференцијабилне и имају исти други извод, довољно је показати да ако за f важи $|f''(x)| < 1$ за $x \in (0, 1)$, $f(0) = f(1) = 0$ тада је и $\max_{x \in (0, 1)} f(x) - \min_{x \in (0, 1)} f(x) \leq \frac{1}{8}$. Такође, без умањења општости, може се претпоставити да је у некој десној околини нуле функција ненегативна (f и $-f$ имају исте нуле и апсолутне вредности другог извода).

Нека је $\alpha = \inf\{x \mid x \in (0, 1) \wedge f(x) < 0\}$ ако је претходни скуп непразан, а $\alpha = 1$ иначе. Тада је $f(\alpha) = 0$ и $f(x) \geq 0$ на $(0, \alpha)$. На $[0, \alpha]$ функција f узима свој максимум (нека је нека од тачака у којима се то дешава β). За $x \in [0, 1]$ важи $|f'(x)| = \left| \int_0^x f''(t) dt \right| \leq \int_0^x |f''(t)| dt \leq x$ и, слично, $|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \frac{x^2}{2}$ (претходни закључак се елегантније може добити из Тејлорове формуле), па је $f(\beta) \leq \frac{\beta^2}{2}$. Аналогно је и $f(\beta) \leq \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}$, па је

$$(f(\beta))^2 \leq \frac{1}{4} \cdot [\beta(\alpha - \beta)]^2 \leq \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\beta + (\alpha - \beta)}{2} \right]^4,$$

односно $f(\beta) \leq \frac{\alpha^2}{8}$.

Ако је $\alpha = 1$, овим је доказ завршен (права $y = \frac{1}{2}$ апроксимира

функцију). Иначе, нека је γ тачка у којој функција узима минимум. Као и горе, следи $-f(\gamma) \leq \frac{(1-\alpha)^2}{8}$, па је $\max_{x \in (0,1)} f(x) - \min_{x \in (0,1)} f(x) = f(\beta) - f(\gamma) \leq \frac{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}{8} \leq \frac{1}{8}$ (квадратна функција $\frac{\alpha^2 + (1-\alpha)^2}{8}$ узима највећу вредност $\frac{1}{8}$). Функција $\frac{1}{2} \cdot (x - x^2)$ показује да се процена која је доказана не може побољшати.

52. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција, диференцијабилна на $(0, 1)$ и важи $f(0) = f(1) = 0$ и $f(\alpha) - f(\beta) = 1$ за неке $0 < \alpha < \beta < 1$. Доказати да важи $|f'(\xi)| = 2$ за неко $0 < \xi < 1$.

Решење. Нека је $f(\alpha) = M$. На основу Ролове теореме примењене на интервал $[0, 1]$ и функцију f , следи да f' на $(0, 1)$ узима вредност нула. Довољно је још показати да $|f'|$ на $(0, 1)$ узима вредност не мању од 2, јер тада, по Дарбуовој теореме, следи да негде узима и вредност 2.

По Лагранжовој теореме, примењеној на функцију f и интервале $[0, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$ и $[\beta, 1]$ следи да постоје тачке у $(0, 1)$ у којима $|f'|$ узима вредности $\frac{|M|}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta - \alpha}$ и $\frac{|1 - M|}{1 - \beta}$. Нека су све претходне вредности мање од 2.

(1) Ако је $M \geq 1$, из $\frac{|M|}{\alpha} = \frac{M}{\alpha} < 2$ и $\frac{1}{\beta - \alpha} < 2$ следи $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha > \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \geq 1$, што је немогуће.

(2) Ако је $M \leq 0$, из $\frac{1}{\beta - \alpha} < 2$ и $\frac{|1 - M|}{1 - \beta} = \frac{1 - M}{1 - \beta} < 2$ следи $1 - \alpha = (1 - \beta) + (\beta - \alpha) > \frac{1 - M}{2} + \frac{1}{2} \geq 1$, тј. $\alpha < 0$, што је немогуће.

(3) Ако је $0 < M < 1$ из $\frac{M}{\alpha} < 2$, $\frac{1}{\beta - \alpha} < 2$ и $\frac{1 - M}{1 - \beta} < 2$ следи $M < 2\alpha$, $1 < 2(\beta - \alpha)$ и $1 - M < 2(1 - \beta)$. Сабирањем претходних неједнакости, добија се $2 < 2$, што је немогуће.

Из добијених контрадикција следи горње тврђење.

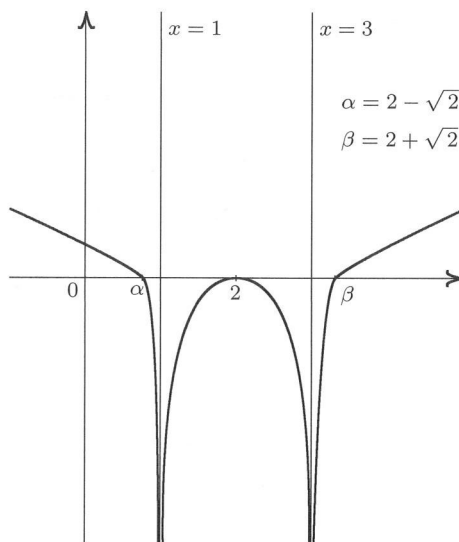
6. ИСПИТИВАЊЕ ФУНКЦИЈА

1. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln|x^2 - 4x + 3|$.

Решење. Домен: мора бити $|x^2 - 4x + 3| > 0$, тј. $x \neq 1, 3$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$. Домен није симетричан у односу на 0, па f није ни парна ни непарна. Како је $|\mathbb{R} \setminus \text{Dom}(f)| = 2$, следи да f не може бити ни периодична.

Нуле и знак: важи $\ln|x^2 - 4x + 3| > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 3| > 1$. На $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ последња неједначина је еквивалентна са $x^2 - 4x + 2 > 0$, тј. $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ и $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$, односно $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$. На $(1, 3)$ последња неједначина је еквивалентна са $-(x^2 - 4x + 3) < -1$, тј. $x^2 - 4x + 2 > 0$, па је $x \in (1, 3)$ и $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$, односно $x \in \emptyset$. Дакле, $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, \infty)$. Слично се добија да важи $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ и $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 3) \cup (3, 2 + \sqrt{2})$.

График:



Први извод: на $\text{Dom}(f)$ важи $f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3} = 2 \cdot \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$. Следи $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2) \cup (3, \infty)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$.

Други извод: на $Dom(f)$ важи $f''(x) = 2 \cdot \frac{(x^2-4x+3)-2 \cdot (x-2)^2}{(x^2-4x+3)^2} = (-2) \cdot \frac{x^2-4x+5}{(x^2-4x+3)^2}$. Како је $x^2 - 4x + 5 > 0$ за свако реално x , следи да је $f''(x) < 0$ за свако $x \in Dom(f)$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$, праве $x = 1$ и $x = 3$ су вертикалне асимптоте функције. Важи и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и $f(x) \sim 2 \ln|x|$ кад $x \rightarrow \infty$ (па функција нема ни косу ни хоризонталну асимптоту).

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, 2 - \sqrt{2})$	$(2 - \sqrt{2}, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 2 + \sqrt{2})$	$(2 + \sqrt{2}, \infty)$
+++	---	---	---	---	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$

помоћу које се лако црта график.

2. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{1 + \ln|x|}{x(1 - \ln|x|)}$.

Решење. *Домен:* величина на коју делује функција $\ln x$ је ненегативна, а једнака је нули ако и само је $x = 0$. Да не би дошло до дељења нулом, мора бити $1 - \ln|x| \neq 0$, тј. $x \neq \pm e$. Следи $Dom(f) = (-\infty, -e) \cup (-e, 0) \cup (0, e) \cup (e, \infty)$.

Парност, непарност, периодичност: дата функција је непарна. Заиста, домен је симетричан, а за свако $x \in Dom(f)$ важи $f(-x) = \frac{1 + \ln|-x|}{-x(1 - \ln|-x|)} = -\frac{1 + \ln|x|}{x(1 - \ln|x|)} = -f(x)$. Није константна, па не може бити и парна, а због облика домена не може бити периодична. Следи да ју је довољно испитати на $(0, \infty)$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, то је $y = 0$ је хоризонтална асимптота функције у ∞ .

Како је $\lim_{x \rightarrow e^\pm} f(x) = \mp \infty$, следи да је $x = e$ вертикална асимптота функције.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, следи да је $x = 0$ вертикална асимптота функције.

Нуле и знак: за $x > 0$ је $\ln|x| > 1$ за $x > e$, а $\ln|x| > -1$ за $x > \frac{1}{e}$, па следи, $f(x) > 0$ за $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, \infty)$, $f(x) = 0$ за $x = \frac{1}{e}$ и $f(x) < 0$ за $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup (1, e)$.

Први извод: први извод је дефинисан да $Dom(f)$. На $(0, e) \cup (e, \infty)$ важи

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x \cdot (1 - \ln x) - (1 + \ln x) \cdot \left[(1 - \ln x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]}{x^2(1 - \ln x)^2} = \frac{\ln^2 x + 1}{x^2(1 - \ln x)^2}.$$

Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (0, e) \cup (e, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x \in \emptyset$, $f'(x) < 0$ за $x \in \emptyset$.

Други извод: други извод је дефинисан на $Dom(f)$. На $(0, e) \cup (e, \infty)$

$$\text{важи } f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot x^2(1 - \ln x)^2 - (\ln^2 x + 1) \cdot 2x(1 - \ln x) \cdot \left[(1 - \ln x) + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]}{x^4(1 - \ln x)^4} = \frac{2 \ln x}{x^3(1 - \ln x)^3}.$$

$$\left[(1 - \ln x) + (\ln^2 x + 1)\right] = \frac{2 \ln x \cdot (\ln^2 x - \ln x + 2)}{x^3(1 - \ln x)^3}.$$

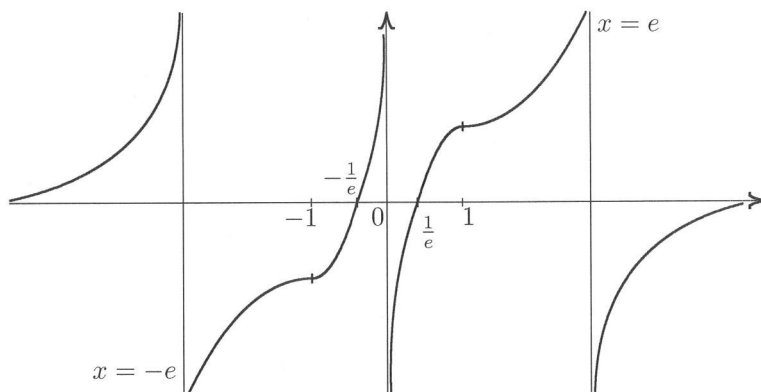
Како је $t^2 - t + 2 > 0$ за $t \in \mathbb{R}$, следи $f''(x) > 0$ за $x \in (1, e)$, $f''(x) = 0$ за $x = 1$, $f''(x) < 0$ за $x \in (0, 1) \cup (e, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$\left(0, \frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$	$(1, e)$	(e, ∞)
---	+++	+++	---
↗↗↗	↗↗↗	↗↗↗	↗↗↗
∩∩∩	∩∩∩	∪∪∪	∩∩∩

помоћу које се лако црта график.

График:



3. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln(2e^{2x} - 5e^x + 3)$.

Решење. Домен: величина под логаритмом мора бити позитивна, па је $2e^{2x} - 5e^x + 3 > 0$, тј. $e^x \notin [1, \frac{3}{2}]$, односно $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (\ln \frac{3}{2}, \infty)$.

Нуле и знак: важи $\ln(2e^{2x} - 5e^x + 3) > 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 3 > 1$. На $Dom(f)$ последња неједначина је еквивалентна са $x \in (-\infty, -\ln 2) \cup (\ln 2, \infty)$. Аналогно је $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\ln 2, \ln 2\}$ и $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\ln 2, 0) \cup (\ln \frac{3}{2}, \ln 2)$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $x = 0$ је вертикална асимптота функције (са леве стране). Како је $\lim_{x \rightarrow \ln \frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$, $x = \ln \frac{3}{2}$ је вертикална асимптота функције (са десне стране). Како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 3$,

$y = \ln 3$ је хоризонтална асимптота функције у $-\infty$. Како је $f(x) = 2x + \ln(2 - 5e^{-x} + 3e^{-2x})$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2 - 5e^{-x} + 3e^{-2x}) = \ln 2$, $y = 2x + \ln 2$ је коса асимптота функције у ∞ .

Први извод: на $Dom(f)$ важи $f'(x) = \frac{4e^{2x} - 5e^x}{2e^{2x} - 5e^x + 3} = \frac{e^x(4e^x - 5)}{2e^{2x} - 5e^x + 3}$. Како је $0 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ и функција $\ln x$ растућа, следи $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\ln \frac{3}{2}, \infty)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$.

Други извод: на $Dom(f)$ важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(8e^{2x} - 5e^x) \cdot (2e^{2x} - 5e^x + 3) - (4e^{2x} - 5e^x)^2}{(2e^{2x} - 5e^x + 3)^2} \\ &= \frac{-10e^{3x} + 24e^{2x} - 15e^x}{(2e^{2x} - 5e^x + 3)^2} = -\frac{e^x(10e^{2x} - 24e^x + 15)}{(2e^{2x} - 5e^x + 3)^2}. \end{aligned}$$

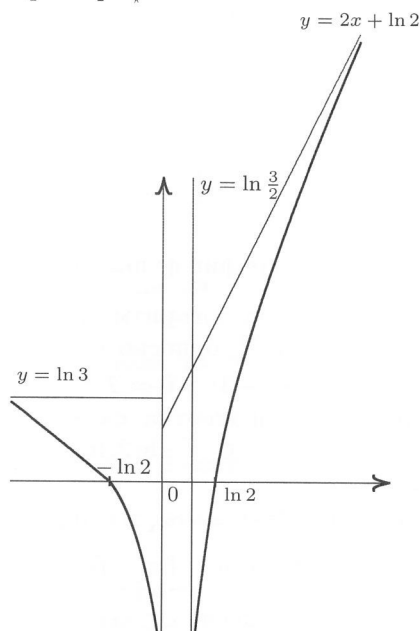
Како је $10t^2 - 24t + 15 > 0$ за свако реално t , следи да је $f''(x) < 0$ за свако $x \in Dom(f)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\ln 2)$	$(-\ln 2, 0)$	$(\ln \frac{3}{2}, \ln 2)$	$(\ln 2, \infty)$
+++ ↘↘↘ ∩∩∩	--- ↘↘↘ ∩∩∩	--- ↗↗↗ ∩∩∩	+++ ↗↗↗ ∩∩∩

помоћу које се лако црта график.

График:



4. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \ln(3e^x - 3 + e^{-x})$.

Решење. Домен: како је $e^x > 0$, следи $f(x) = -x + \ln(3e^{2x} - 3e^x + 1)$ на $Dom(f)$, па како је $3t^2 - 3t + 1 > 0$ за $t \in \mathbb{R}$, следи $Dom(f) = \mathbb{R}$.

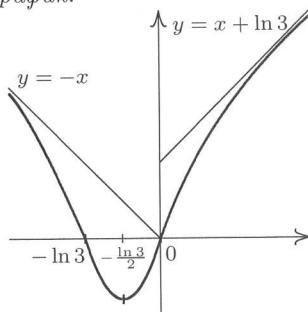
Нуле и знак: како је $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3e^x - 3 + e^{-x} > 1 \Leftrightarrow 3e^x + e^{-x} > 4 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 4e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow (3e^x - 1)(e^x - 1) > 0$, следи $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -\ln 3) \cup (0, \infty)$. Слично, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\ln 3, 0\}$ и $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\ln 3, 0)$. Како функција има две нуле (а не бесконачно много), није периодична, а како је $\pm f(\ln 3) \neq 0 = f(-3)$, није ни парна ни непарна.

Први извод: $f'(x) = (-x + \ln(3e^{2x} - 3e^x + 1))' = -1 + \frac{6e^{2x} - 3e^x}{3e^{2x} - 3e^x + 1} = \frac{3e^{2x} - 1}{3e^{2x} - 3e^x + 1}$, па је $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{\ln 3}{2})$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\ln 3}{2}$ и $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{\ln 3}{2}, \infty)$.

Асимптотика: како је

$f(x) = -x + \ln(3e^{2x} - 3e^x + 1)$
и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(3e^{2x} - 3e^x + 1) = 0$,
функција има косу асимптоту $y = -x$ кад $x \rightarrow -\infty$. Како је $f(x) = x + \ln 3 + \ln(1 - 3e^{-x} + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x})$
и $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 - 3e^{-x} + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x}) = 0$,
функција има косу асимптоту $y = x + \ln 3$ кад $x \rightarrow \infty$.

График:



Други извод: $f''(x) = \left(1 + \frac{3e^x - 2}{3e^{2x} - 3e^x + 1}\right)' = \frac{3e^x(3e^{2x} - 3e^x + 1) - (3e^x - 2)(6e^{2x} - 3e^x)}{(3e^{2x} - 3e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(3e^{2x} - 3e^x + 1)^2} \cdot [3e^{2x} - 3e^x + 1 - 6e^{2x} + 7e^x - 2] = -\frac{3e^x}{(3e^{2x} - 3e^x + 1)^2} \cdot (3e^{2x} - 4e^x + 1) = -\frac{3e^x}{(3e^{2x} - 3e^x + 1)^2} \cdot (3e^x - 1)(e^x - 1)$, па је $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\ln 3, 0)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\ln 3, 0\}$ и $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\ln 3) \cup (0, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\ln 3)$	$(-\ln 3, -\frac{\ln 3}{2})$	$(-\frac{\ln 3}{2}, 0)$	$(0, \infty)$
+++ ↘ ↘ ↘ ∩ ∩ ∩	--- ↘ ↘ ↘ ∪ ∪ ∪	--- ↗ ↗ ↗ ∪ ∪ ∪	+++ ↗ ↗ ↗ ∩ ∩ ∩

помоћу које се лако црта график.

5. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = 2 \ln |e^x - 1| - \ln |e^x - 2|.$$

Решење. Домен: величине на које делује функција $\ln x$ су ненегативне, а једнаке су нули ако и само је $e^x = 1$ или $e^x = 2$, тј. $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \ln 2) \cup (\ln 2, \infty)$.

Нуле и знак: како је $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{(e^x-1)^2}{|e^x-2|} > 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x-1)^2}{|e^x-2|} > 1$, а последње је за $e^x > 2$ еквивалентно са $e^{2x} - 3e^x + 3 > 0$, што је тачно, а за $e^x < 2$ са $e^{2x} - e^x - 1 > 0$, тј. $e^x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$. Следи, $f(x) > 0$ за $x \in (\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}), \ln 2) \cup (\ln 2, \infty)$. Слично, $f(x) = 0$ за $x = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))$.

Први извод: $f'(x) = \frac{2e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x-2} = \frac{e^x(e^x-3)}{(e^x-1)(e^x-2)}$. Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (0, \ln 2) \cup (\ln 3, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = \ln 3$, $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 2, \ln 3)$. За $x = \ln 3$ се добија локални минимум функције f .

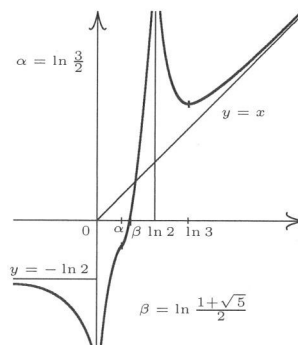
Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, следи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, тј. $y = -\ln 2$ је хоризонтална асимптота у $-\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 - 2e^{-x})) = 0$, следи $f(x) = 2x - x + (2 \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 - 2e^{-x})) = x + o(1)$ кад $x \rightarrow \infty$, тј. $y = x$ је коса асимптота у ∞ . Како је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = \infty$, функција има вертикалне асимптоте $x = 0$ и $x = \ln 2$.

Други извод: како је $f'(x) = 2 + \frac{\frac{2}{e^x-1} - 1 - \frac{2}{e^x-2}}{e^x} = 1 + \frac{2}{e^x-1} - \frac{2}{e^x-2}$, следи

$$f''(x) = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2} + \frac{2e^x}{(e^x-2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x-1)^2(e^x-2)^2} \cdot (2e^x-3).$$

Дакле $f''(x) > 0$ за $x \in (\ln \frac{3}{2}, \ln 2) \cup (\ln 2, \infty)$, $f''(x) = 0$ за $x = \ln \frac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \ln \frac{3}{2})$.

График:



Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, 0)$	$(0, \ln \frac{3}{2})$	$(\ln \frac{3}{2}, \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2})$	$(\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ln 2)$	$(\ln 2, \ln 3)$	$(\ln 3, \infty)$
---	---	---	+++	+++	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
nnn	nnn	uuu	uuu	uuu	uuu

помоћу које се лако црта график.

6. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решење. Домен: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Нуле и знак: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = x^2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Слично, $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} > \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 > x^2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Следи $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Први извод: дефинисан је на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ и важи $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$. Следи $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$. Слично, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, следи $(x+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$, па важи $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (хоризонтална асимптота), график функције се приближава асимптоти ($x = 0$) са горње стране у $+\infty$, а са доње у $-\infty$ (због знака израза $\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$). У тачкама у којима извод није дефинисан $\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -\infty$, тј. функција f у тачку $(-1, -1)$ „улази” са леве стране под углом $-\frac{\pi}{2}$, а са десне под углом $\frac{\pi}{2}$, а у тачку $(0, 1)$ са леве стране под углом $\frac{\pi}{2}$, а са десне под углом $-\frac{\pi}{2}$ (има „шпице” – график се „лепи” на праве $x = 0$ и $x = -1$).

Други извод: дефинисан је на $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$ и важи $f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \right)$. Следи $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^4}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^4} < \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} < \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 < (x+1)^2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, тј. важи $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$.

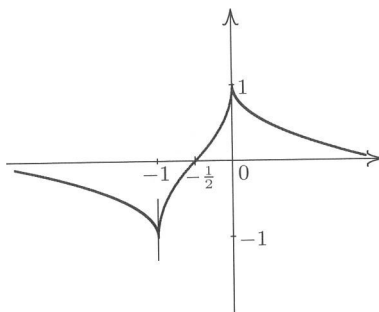
Слично,

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$,
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (превојна тачка).

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \infty)$
--	--	++	++
$\searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow$	$\searrow \searrow$
$\cap \cap$	$\cap \cap$	$\cup \cup$	$\cup \cup$

помоћу које се лако црта график.



Напомена. Функција $(f(x))^\alpha$, за $0 < \alpha < 1$, није диференцијабилна у тачкама у којима је $|f(x)| = 0$.

7. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[4]{(x+2)^3(x-2)}$.

Решење. *Домен:* како поткорена величина мора бити ненегативна, следи $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Због облика домена, функција није периодична. Иако је домен симетричан, функција није ни парна ни непарна, јер је нпр. $f(3) = \sqrt[4]{125}$ и $f(-3) = \sqrt[4]{5}$, па је $f(3) \neq \pm f(-3)$.

Нуле и знак: како је корен ненегативан, следи $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$.

Први извод: f' је дефинисан на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ и важи

$$f'(x) = \frac{3(x+2)^2(x-2) + (x+2)^3}{4[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{4}}} = \frac{(4x-4)(x+2)^2}{4[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{4}}} = \frac{(x-1)(x+2)^2}{[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{4}}}.$$

Следи да је $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ и $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$. У $x = -2$ и $x = 2$ функција достиже локални минимум.

Асимптотика: како је (за довољно велико $|x|$)

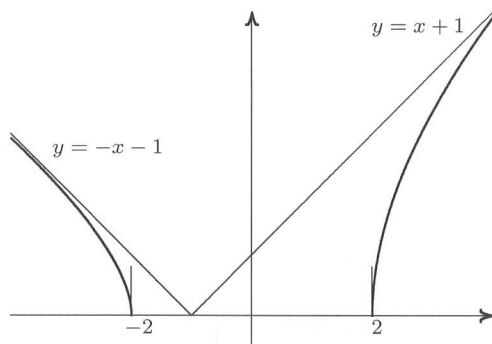
$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= |x| \cdot \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \end{aligned}$$

следи да је $y = x + 1$, коса асимптота функције кад $x \rightarrow \infty$, а $y = -x - 1$, коса асимптота функције кад $x \rightarrow -\infty$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \infty$, график функције се „лепи“ на $x = 2$ кад $x \rightarrow 2+$.

Како је $\lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = -\infty$, график функције се „лепи“ на $x = -2$ кад $x \rightarrow -2-$.

График:



Други извод: f'' је дефинисан на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ и важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2 + 6x)[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{4}} - (x-1)(x+2)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot [(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{4}}}{[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3(x+2)^4}{[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{7}{4}}} \cdot [x(x-2) - (x-1)^2] = -\frac{3(x+2)^4}{[(x+2)^3(x-2)]^{\frac{7}{4}}}. \end{aligned}$$

Следи да је $f''(x) < 0$ на $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -2)$	$(2, \infty)$
+++	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
□□□	□□□

помоћу које се лако црта график.

8. Нека је $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$.

(а) Наћи константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, тако да важи

$$f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ кад } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{и } f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ кад } x \rightarrow -\infty.$$

(б) Испитати ток и нацртати график функције f .

Решење. Домен: како поткорена величина мора бити ненегативна, следи $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$.

Први извод: f' је дефинисан на $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ и важи $f'(x) = \frac{2x+3}{2 \cdot \sqrt{x^2+3x+2}} + 1$.

Асимптотика: како је (за довољно велико $|x|$)

$$f(x) = |x| \cdot \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + x = x + |x| \cdot \left(1 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{9}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= x + |x| \cdot \left(1 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right),$$

следи да је $y = 2x + \frac{3}{2}$ коса асимптота функције кад $x \rightarrow \infty$, а $y = -\frac{3}{2}$ хоризонтална асимптота функције кад $x \rightarrow -\infty$ (дакле, $a_1 = 2, b_1 = \frac{3}{2}, c_1 = -\frac{1}{8}$ и $a_2 = 0, b_2 = -\frac{3}{2}, c_2 = \frac{1}{8}$).

Како је $\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \infty$, график функције се „лепи“ на $x = -1$ кад $x \rightarrow -1+$. Како је $\lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = -\infty$, график функције се „лепи“ на $x = -2$ кад $x \rightarrow -2-$.

Други извод: f'' је дефинисан на $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ и важи

$$f''(x) = \frac{2 \cdot [x^2 + 3x + 2]^{\frac{1}{2}} - (2x + 3) \cdot \frac{1}{2 \cdot [x^2 + 3x + 2]^{\frac{1}{2}}} \cdot (2x + 3)}{2[x^2 + 3x + 2]}$$

$$= \frac{4(x^2 + 3x + 2) - (2x + 3)^2}{4[x^2 + 3x + 2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4[x^2 + 3x + 2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Следи да је $f''(x) < 0$ на $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.

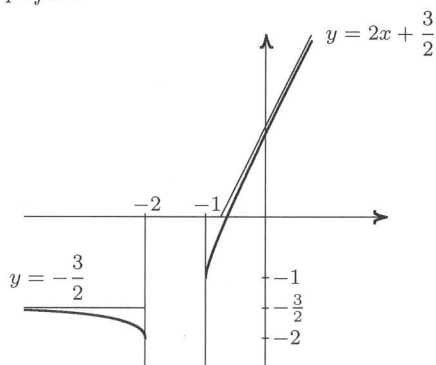
Из претходног следи да је f' опадајућа функција на компонентама повезаности $Dom(f)$. Она је очигледно позитивна на $(-1, \infty)$, а како

f има хоризонталну асимптоту у $-\infty$, следи да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$, па је f' негативно на $(-\infty, -1)$. У $x = -2$ и $x = -1$ функција достиже локални минимум.

Нуле и знак: како је f опадајућа на $(-\infty, -2)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\frac{3}{2} < 0$, следи да је $f(x) < 0$ на $(-\infty, -2)$. Како f расте на $(-1, \infty)$ и како је $f(-\frac{2}{3}) = 0$, следи да је $f(x) > 0$ на $(-\frac{2}{3}, \infty)$ и $f(x) < 0$ на $(-1, -\frac{2}{3})$.

Из претходних резултата се до- *График:*
бија таблица

$(-\infty, -2)$	$(-1, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, \infty)$
---	---	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$



помоћу које се лако црта график.

9. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2ax^2}$ за $a > 0$.

Решење. Домен: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Нуле и знак: како је трећи корен истог знака као и поткорена величина, следи $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (2a, \infty)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2a\}$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2a)$.

Први извод: f' је дефинисан на $(-\infty, 0) \cup (0, 2a) \cup (2a, \infty)$ и важи

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4ax}{3[x^2(x - 2a)]^{\frac{2}{3}}} = \frac{x \cdot (x - \frac{4a}{3})}{[x^2(x - 2a)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Следи да је $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{4a}{3})$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3}$ и $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{4a}{3}, 2a) \cup (2a, \infty)$. У $x = 0$ функција достиже локални максимум. У $x = \frac{4a}{3}$ функција достиже локални минимум.

Асимптотика: Како је (за довољно велико $|x|$)

$$f(x) = x \cdot \left(1 - \frac{2a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x \cdot \left(1 - \frac{2a}{3x} - \frac{4a^2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \frac{2a}{3} - \frac{4a^2}{9x} + \left(\frac{1}{x}\right),$$

следи да је $y = x - \frac{2a}{3}$ коса асимптота функције кад $x \rightarrow \pm\infty$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$, график функције се „лепи” на $x = 0$ кад $x \rightarrow 0\pm$. Како је $\lim_{x \rightarrow 2a^-} f'(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 2a^+} f'(x) = \infty$, график функције се „лепи” на $x = 2a$ кад $x \rightarrow 2a\pm$.

Други извод: f'' је дефинисан на $(-\infty, 0) \cup (0, 2a) \cup (2a, \infty)$ и важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x - \frac{4a}{3}) \cdot [x^2(x-2a)]^{\frac{2}{3}} - x \cdot (x - \frac{4a}{3}) \cdot \frac{2}{3} \cdot [x^2(x-2a)]^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x \cdot (x - \frac{4a}{3})}{[x^2(x-2a)]^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{2x^2}{[x^2(x-2a)]^{\frac{5}{3}}} \cdot \left[\left(x - \frac{2a}{3}\right) \cdot (x-2a) - \left(x - \frac{4a}{3}\right)^2 \right] \\ &= -\frac{8a^2x^2}{9 \cdot [x^2(x-2a)]^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

Следи да је

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2a, \infty),$$

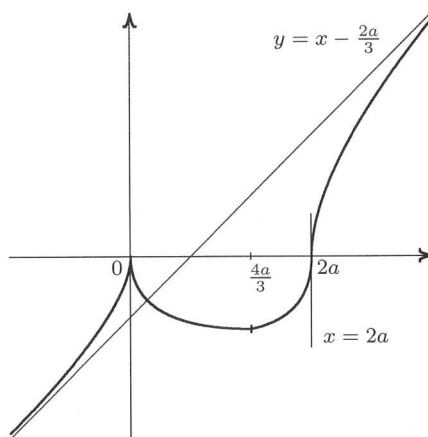
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ и}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2a).$$

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4a}{3})$	$(\frac{4a}{3}, 2a)$	$(2a, \infty)$
— — — ↗ ↘ ↗ UUU	— — — ↘ ↘ ↘ UUU	— — — ↗ ↗ ↗ UUU	+++ ↗ ↗ ↗ nnn

График:



помоћу које се лако црта график.

10. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + x - \frac{2e^x}{1 + e^x}.$$

Решење. Домен: како је $1 + e^{-x} > 0$ и $1 + e^x \neq 0$, дефинисан је дати логаритам и не долази до дељења нулом. Следи $Dom(f) = \mathbb{R}$. Како је $x = \ln(e^x)$, следи $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + x - \frac{2e^x}{1 + e^x} = \ln(1 + e^{-x}) + \ln(e^x) - \frac{2e^x}{1 + e^x} = \ln(1 + e^x) - \frac{2e^x}{1 + e^x} = \ln(1 + e^x) - 2 + \frac{2}{1 + e^x}$.

Први извод: $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x - \frac{2}{(e^x + 1)^2} \cdot e^x = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$. Како је $e^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и $(e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0) \wedge (e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0)$, следи $f'(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0)$. За $x = 0$ се добија локални минимум функције f .

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, следи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, тј. $x = 0$ је хоризонтална асимптота у $-\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(1 + e^{-x}) - \frac{2e^x}{1 + e^x} \right) = -2$,

слиеди $f(x) = x - 2 + o(1)$ кад $x \rightarrow \infty$, *График:*

тј. $y = x - 2$ је коса асимптота у ∞ .

Нуле и знак:

пошто је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и f опада на

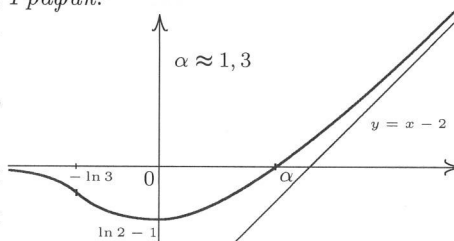
$(-\infty, 0)$, важи $f(x) < 0$ на $(-\infty, 0)$.

Пошто је $f(0) < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и

f строго расте на $(0, \infty)$, постоји

$\alpha > 0$ тако да важи $f(x) < 0$ за

$x \in (0, \alpha)$ и $f(x) > 0$ за $x \in (\alpha, \infty)$.



Други извод: $f''(x) = \frac{(2e^{2x} - e^x) \cdot (1 + e^x)^2 - (e^{2x} - e^x) \cdot 2(e^x + 1)e^x}{(1 + e^x)^4} =$
 $\frac{e^x \cdot ((2e^x - 1)(e^x + 1) - 2e^x(e^x - 1))}{(1 + e^x)^3} = \frac{e^x(3e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$. Како је $e^x > 0$ за свако
 $x \in \mathbb{R}$ и $(3e^x > 1 \Leftrightarrow x > -\ln 3) \wedge (3e^x < 1 \Leftrightarrow x < -\ln 3)$,
 слиеди $f''(x) > 0$ за $x \in (-\ln 3, \infty)$, $f''(x) = 0$ за $x = -\ln 3$, $f''(x) < 0$ за
 $x \in (-\infty, -\ln 3)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\ln 3)$	$(-\ln 3, 0)$	$(0, \alpha)$	(α, ∞)
---	---	---	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
$\cap \cap \cap$	$\cup \cup \cup$	$\cup \cup \cup$	$\cup \cup \cup$

помоћу које се лако црта график.

11. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arctg x + \frac{2x}{1+x^2}$.

Решење. Домен: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Симетричност: како је домен симетричан и важи $(\forall x \in Dom(f)) f(-x) =$
 $\arctg(-x) + \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\arctg x - \frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$, тј. за свако $x \in Dom(f)$
 важи $f(-x) = -f(x)$, односно дата функција је непарна, па је довољно
 проучити је на $[0, \infty)$.

Нуле и знак: за $x > 0$ важи $\arctg x > 0$ и $\frac{2x}{1+x^2} > 0$, па слиеди $f(x) > 0$ за
 $x > 0$ и $f(x) = 0$ за $x = 0$.

Први извод: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}$, па је $f'(x) > 0$ за
 $x \in (0, \sqrt{3})$, $f'(x) = 0$ за $x = \sqrt{3}$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (\sqrt{3}, \infty)$.

Асимптотика: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ (хоризонтална асимптота), $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 3$.

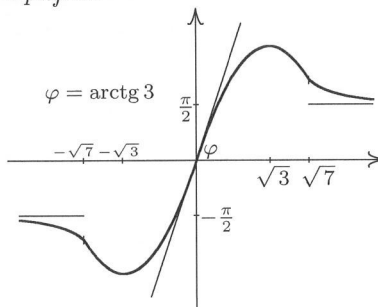
Други извод: $f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (3-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x \cdot (x^2-7)}{(1+x^2)^3}$, па је $f''(x) >$
 0 за $x \in (\sqrt{7}, \infty)$, $f''(x) = 0$ за $x = \sqrt{7}$, $f''(x) < 0$ за $x \in (0, \sqrt{7})$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \sqrt{7})$	$(\sqrt{7}, \infty)$
+++	+++	+++
↗↗↗	↘↘↘	↘↘↘
nnn	nnn	uuu

помоћу које се лако црта график. На интервалу $(-\infty, 0)$ функција се доцртава тако да буде централно симетрична у односу на тачку $(0, 0)$.

График:



12. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \operatorname{arctg}(e^x) - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}.$$

Решење. Домен: како је $e^{2x} + 1 \neq 0$ и $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0$, следи $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = 1$, следи да је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$, тј. функција има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ кад $x \rightarrow \infty$. Како је $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x) - x + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+e^{2x})$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\operatorname{arctg}(e^x) + \frac{1}{2} \cdot \ln(1+e^{2x})) = 0$, следи да је $f(x) = -x + o(1)$ кад $x \rightarrow -\infty$, тј. $y = -x$ је коса асимптота функције кад $x \rightarrow -\infty$.

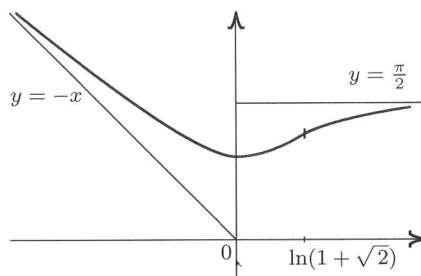
Први извод: f' је дефинисан на $\mathbb{R}$ и важи

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{1+e^{2x}}.$$

Следи да је $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$. У $x = 0$ функција достиже локални минимум.

Нуле и знак: како f опада на $(-\infty, 0)$, расте на $(0, \infty)$ и $f(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} > 0$ ($f(0) \approx 1,13197$), следи да је $f(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

График:



Други извод: f'' је дефинисан на $\mathbb{R}$ и важи

$$f''(x) = \frac{e^x(1+e^{2x}) - 2e^{2x}(e^x - 1)}{1+e^{2x}} = -\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} \cdot (e^{2x} - 2e^x - 1).$$

Пошто e^x узима позитивне вредности, израз у загради је позитиван за $e^x \in (\ln(1 + \sqrt{2}), \infty)$, а негативан за $e^x \in (0, \ln(1 + \sqrt{2}))$. Следи да је $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \ln(1 + \sqrt{2}))$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$ и $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\ln(1 + \sqrt{2}), \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, 0)$	$(0, \ln(1 + \sqrt{2}))$	$(\ln(1 + \sqrt{2}), \infty)$
+++ ↘ ↘ ↘ ∪ ∪ ∪	+++ ↗ ↗ ↗ ∪ ∪ ∪	+++ ↗ ↗ ↗ ∩ ∩ ∩

помоћу које се лако црта график.

13. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $|x| \neq 0$ (и $x^2 + 1 \neq 0$, но то је испуњено за свако $x \in \mathbb{R}$), тј. $x \neq 0$. Због домена функције $\arcsin$, мора бити $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(1-|x|)^2}{1+x^2} \geq 0$, што је тачно за свако $x \in \mathbb{R}$. Дакле $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Први извод: скуп на коме је дефинисан f' је $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ (0 због домена, а преостале тачке због тога што у њима вредност функције која се налази под функцијом $\arcsin$ узима вредност ± 1). На њему важи

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|^2}} \cdot \left(-\frac{1}{|x|^2} \right) \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{2 \operatorname{sgn} x}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot (\operatorname{sgn}(1-x^2) - \operatorname{sgn} x) \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{1+x^2}, & \text{за } x > 1 \\ 0, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ \frac{4}{1+x^2}, & \text{за } x \in (-1, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Следи $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$.

Асимптотика: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0 + 0 = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0 + 0 = 0$ (хоризонталне асимптоте), $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 = \pi \quad (\text{граничне вредности у конач-} \\ \text{ним тачкама које су крајеви домена изводне функције}), \quad \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} -\frac{4}{1+x^2} = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{4}{1+x^2} &= 4, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{4}{1+x^2} = 2. \end{aligned}$$

Нуле и знак: како је функција f непрекидна, $f(-1) = 0$ и $f'(x) = 0$ на $(-\infty, -1)$ важи $f(x) = 0$ за свако $x \in (-\infty, -1]$. Слично, $f(x) = \pi$ за свако $x \in [0, 1]$. Како је $f(-1) = 0$ и $f'(x) > 0$ на $(-1, 0)$, следи да је $f(x) > 0$ на $(-1, 0)$. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ и $f'(x) < 0$ на $(1, \infty)$, следи да је $f(x) > 0$ на $(1, \infty)$.

$$\text{Други извод: } f''(x) = \begin{cases} \frac{8x}{(1+x^2)^2}, & \text{за } x > 1 \\ 0, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ -\frac{8x}{(1+x^2)^2}, & \text{за } x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

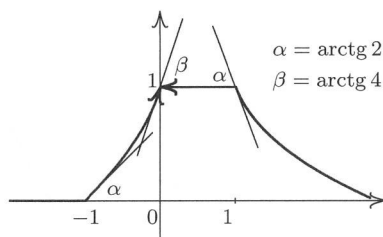
Следи $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Из претходних резултата се до-
бија таблица

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
0 0	++	++	++
$\rightarrow \rightarrow$	$\nearrow \nearrow$	$\rightarrow \rightarrow$	$\searrow \searrow$
--	$\cup \cup$	--	$\cup \cup$

помоћу које се лако црта график.

График:



Напомена. Функција $\arcsin(f(x))$ није диференцијабилна у тачкама у којима је $|f(x)| = 1$.

14. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{x}{2} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Решење. Домен: величина на коју делује $\arcsin$ мора бити по модулу не већа од 1. Како је $|\frac{2x}{1+x^2}| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (|x| - 1)^2$ (*), следи да је $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Парност, непарност, периодичност: функција је непарна, па ју је довољно испитати на $[0, \infty)$. Није парна, ни периодична.

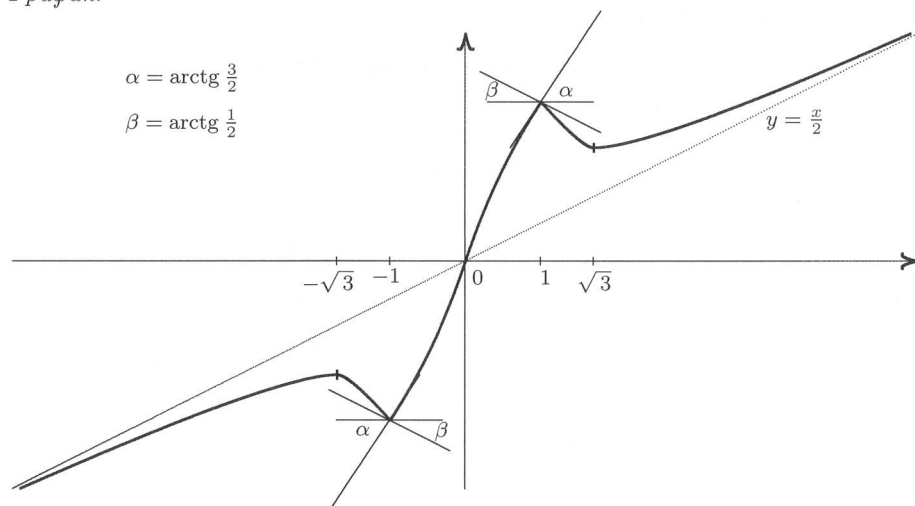
Нуле и знак: како је $\arcsin t \geq 0$ за $t \geq 0$, а једнакост важи ако и само ако је $t = 0$, следи да је $f(x) = 0$ ако и само ако је $x = 0$, односно $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Први извод: област дефинисаности првог извода је $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (из $(*)$) следи да извод није дефинисан за $x = 1$). На $(0, 1) \cup (1, \infty)$ важи

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{|1-x^2|}{1-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{1+x^2}, & \text{за } x \in (1, \infty) \\ \frac{x^2-3}{2(1+x^2)}, & \text{за } x \in (0, 1) \end{cases}. \end{aligned}$$

Следи да је $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ и $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, \sqrt{3})$. У тачки 1 се достиже локални максимум. У тачки $\sqrt{3}$ се достиже локални минимум.

График:



Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, следи да је $f(x) = \frac{x}{2} + o(1)$ кад $x \rightarrow \infty$, тј. $y = \frac{x}{2}$ је коса асимптота функције кад $x \rightarrow \infty$. У тачки 1 функција има „шпиц” и важи $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \frac{3}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$, тј. график „улази” у тачку $\left(1, \frac{\pi+1}{2}\right)$ под угловима $\arctg \frac{3}{2}$ и $\arctg \left(-\frac{3}{2}\right)$.

Други извод: област дефинисаности другог извода је $x \notin \{-1, 1\}$. Даље је

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{за } x \in (1, \infty) \\ -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{за } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Следи да је $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ и $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

Коначно, понашање функције се може прочитати из таблице:

$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
+++	+++	+++
↗↗↗	↘↘↘	↗↗↗
nnn	uuu	uuu

помоћу које се лако црта график. На $(-\infty, 0)$ график функције се доцртава тако да буде симетричан у односу на $(0, 0)$.

15. Нека је $f(x) = 2 \arccos x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

(а) Наћи нуле $f(x)$. (б) Испитати ток и нацртати график функције f .

Решење. Домен: Поткорена величина мора бити ненегативна, а величине на које делују $\arcsin x$ и $\arccos x$ по апсолутној вредности не веће од 1. Како је $|2x\sqrt{1-x^2}| \leq 1 \Leftrightarrow 4x^2(1-x^2) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (2x^2-1)^2$ (*), следи да је $Dom(f) = [-1, 1]$.

Први извод: по (*), величина под $\arcsin x$ је из $\{-1, 1\}$ ако и само ако је $x \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, па је f' дефинисан на $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ и важи

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4}} \cdot \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1-2x^2}{|1-2x^2|} \right) \\
 &= \begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{за } x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 0, & \text{за } x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Следи $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Асимптотика: на $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ функција је константна (2π и 0 , редом), па је $\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = 0$. Важи и $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}+} f'(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}+} f'(x) = -4\sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}+} f'(x) = -4\sqrt{2}$ и $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}-} f'(x) = 0$ (коefficientи нагиба, да би се одредили углови под којима график функције „улази“ у тачке $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\pi)$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$).

Нуле и знак: како је функција f непрекидна, $f(1) = 0$ и $f'(x) = 0$ на $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ важи $f(x) = 0$ за свако $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Слично, $f(x) = 2\pi$ за свако $x \in [-1, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Како је $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ и $f'(x) > 0$ на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, следи да је $f(x) > 0$ на $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (овим је завршен део (а)).

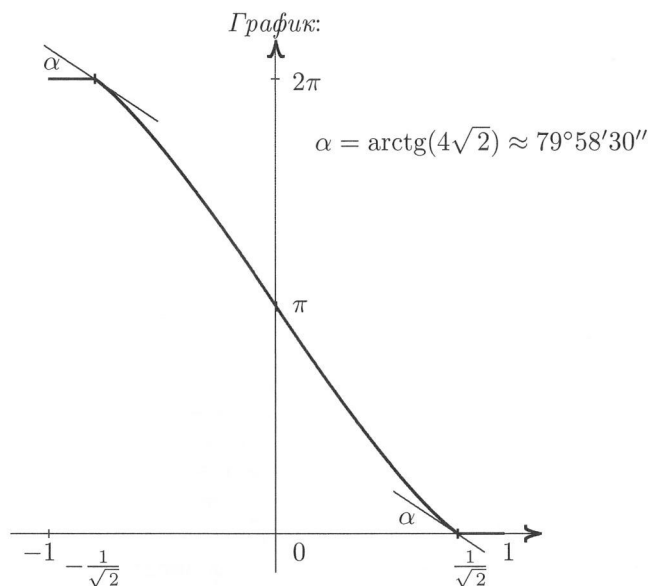
$$\text{Други извод: } f''(x) = \begin{cases} \frac{4x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{за } x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0, & \text{за } x \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1) \end{cases}$$

Следи $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$
0 0 0	+	+	+
→→→	↘	↘	→→→
---	∩	∪	---

помоћу које се лако црта график.



16. Нека је $f(x) = \sqrt{x(x+2)} \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

- (а) Наћи константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$, тако да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o(\frac{1}{x})$ кад $x \rightarrow +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o(\frac{1}{x})$ кад $x \rightarrow -\infty$.
 (б) Испитати ток и нацртати график функције f .

Решење. Домен: како величина на коју делује квадратни корен не сме бити негативна, мора бити $x(x+2) \geq 0$. Да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$. Дакле $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.

(а) По претходном, функција f је дефинисана у околинама $-\infty$ и ∞ . Онда $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, па следи

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x(x+2)} \cdot e^{\frac{1}{x}} = |x| \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \\ &= |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= |x| \cdot \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Дакле $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow \infty$ и $f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow -\infty$ (тј. $a_1 = c_1 = 1, b_1 = 2, a_2 = c_2 = -1, b_2 = -2$).

(б) Нуле и знак: како су кодомени корене и експоненцијалне функције $\mathbb{R}_0^+$ и $\mathbb{R}^+$, следи $f(x) \geq 0$, при чему једнакост важи ако и само ако корена функција узима вредност нула. Следи $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$, $f(x) = 0$ за $x = -2$ и $f(x) < 0$ за $x \in \emptyset$.

Први извод: $f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x(x+2)}} \cdot e^{\frac{1}{x}} + \sqrt{x(x+2)} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2 \cdot \sqrt{x(x+2)}} \cdot (x^3 - 2x) = \frac{(x^2-2) \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x \cdot (x(x+2))^{\frac{1}{2}}}$, па како је $-2 < -\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}$, следи $f'(x) > 0$ за $x \in (\sqrt{2}, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = \sqrt{2}$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \sqrt{2})$. За $x = \sqrt{2}$ се достиже локални минимум.

Асимптотика: према (а), функција f има косу асимптоту $y = x + 2$ у ∞ , којој се приближава са „горње” стране и косу асимптоту $y = -x - 2$ у $-\infty$, којој се приближава са „горње” стране. Важи и $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(x+2)} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{функције } \sqrt{x} \text{ и } \sqrt{x+2} \text{ су дефиниса-} \\ \text{не за } x \rightarrow 0^+, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+2} \text{ посто-} \\ \text{ји, коначан је и различит од нуле} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \infty, \\ e^{\frac{1}{x}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ су диференцијабилне и} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \neq 0 \text{ на нпр. } (0, 1) \end{array} \right\} \\ &= \sqrt{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = 2\sqrt{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \infty, \end{aligned}$$

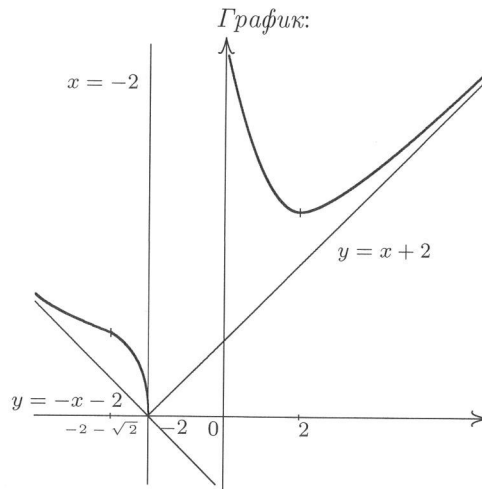
тј. $x = 0$ је вертикална асимптота (са десне стране). Како је $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\infty$, следи да се у крају домена -2 функција f „лепи” на праву $x = -2$.

Други извод: $f''(x) = \frac{1}{x^2 \cdot (x(x+2))} \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) (x^2 - 2) + e^{\frac{1}{x}} \cdot 2x \right) \cdot x \sqrt{x(x+2)} - e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^2 - 2) \left(\sqrt{x(x+2)} + x \cdot \frac{2(x+1)}{2 \cdot \sqrt{x(x+2)}} \right) = \frac{1}{x^2 \cdot (x(x+2))} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x(x+2)}} \cdot \left[(2x^3 - x^2 + 2)(x+2) - (x^2 - 2)(2x^2 + 3x) \right] = \frac{2e^{\frac{1}{x}}(x^2 + 4x + 2)}{x^2 \cdot (x(x+2))^{\frac{3}{2}}}$, па је $f''(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (0, \infty)$, $f''(x) = 0$ за $x = -2 - \sqrt{2}$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-2 - \sqrt{2}, 0)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -2 - \sqrt{2})$	$(-2 - \sqrt{2}, -2)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
++++	++++	+++	+++
↘↘↘↘	↘↘↘↘	↘↘↘	↗↗↗
UUUU	nnnn	UUU	UUU

помоћу које се лако црта график.



17. Нека је $f(x) = \frac{x e^{\frac{\pi}{x}}}{1 + e^{\frac{\pi}{x}}}$.

(а) Одредити константе a, b и c , тако да важи $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, кад $x \rightarrow \pm\infty$.

(б) Испитати ток и нацртати график функције f .

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$ и $1 + e^{\frac{\pi}{x}} \neq 0$. Како је други услов увек испуњен, следи $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(а) По претходном, функција f је дефинисана у околинама $-\infty$ и ∞ . Следи $\frac{\pi}{x} \rightarrow 0$, па (коришћењем развоја функција e^x и $(1+x)^{-1}$ око нуле

и особина „малог o “) следи

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \cdot \left[1 - \left(1 + e^{\frac{\pi}{x}} \right)^{-1} \right] = x \cdot \left[1 - \left(1 + \left(1 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right)^{-1} \right] \\
 &= x \cdot \left[1 - \left(2 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{-1} \right] = x \cdot \left[1 - \left(2 + \frac{\pi}{x} + \frac{\pi^2}{2x^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{-1} \right] = x \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^{-1} \right] \\
 &= x \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) + \left(\frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + o\left(\left(\frac{\pi}{2x} + \frac{\pi^2}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)^2 \right) \right) \right] = x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ кад } x \rightarrow \pm\infty, \text{ тј. } a = \frac{1}{2}, b = \frac{\pi}{4}, c = 0.
 \end{aligned}$$

Први извод: Ако је $K = e^{\frac{\pi}{x}}$, важи $K'(x) = K \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$, па је $f'(x) = \frac{K}{1+K} + x \cdot \frac{1}{(1+K)^2} \cdot K \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = \frac{K}{(1+K)^2} \cdot \left[K + 1 - \frac{\pi}{x}\right]$. Како је $K(x) = e^{\frac{\pi}{x}} > 0$ и како важи $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq 1 + x$, следи $K(x) + 1 - \frac{\pi}{x} \geq 1 + \frac{\pi}{x} + 1 - \frac{\pi}{x} = 2 > 0$. Дакле, $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f'(x) \leq 0$ за $x \in \emptyset$.

Асимптотика: из дела (а) следи да функција f има косу асимптоту $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ кад $x \rightarrow \pm\infty$. По теорему о лimesу производа, важи

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\pi}{x}}}{1 + e^{\frac{\pi}{x}}} = \begin{cases} 0 \cdot 1 = 0, & \text{за } x \rightarrow 0+ \\ 0 \cdot 0 = 0, & \text{за } x \rightarrow 0- \end{cases}, \text{ а пошто је}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{\pi}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{\frac{\pi}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \infty \\ \frac{1}{x} \text{ и } e^{\frac{\pi}{x}} \text{ су диференцијабилне и } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \pi e^{\frac{\pi}{x}} = \infty,$$

$$\text{следи и } \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + K^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{x(K+1)} \right) = 1 - \frac{\pi}{\lim_{x \rightarrow 0+} x e^{\frac{\pi}{x}}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \text{односно } \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{K}{1+K} - \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{\pi}{1+K} \cdot \frac{K}{x} \right) = (-\pi) \cdot \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{\frac{\pi}{x}}}{x} = \\
 &= (-\pi) \cdot \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0+} (-t) e^{\frac{\pi}{t}}} = 0 \text{ (функција } -t \text{ је непрекидна)}.
 \end{aligned}$$

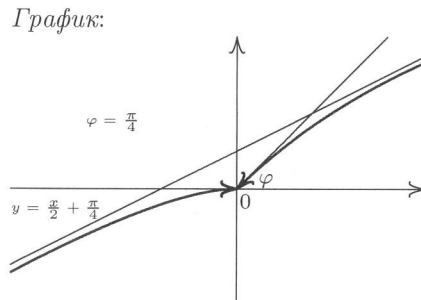
Дакле, тачка $(0, 0)$ је „коначна тачка“, график функције f се „лепи“ на x -осу кад $x \rightarrow 0-$, односно на праву $y = x$ кад $x \rightarrow 0+$.

$$\begin{aligned}
 \text{Други извод: како је } f'(x) &= 1 - \frac{1}{1+K} - \frac{1}{(1+K)^2} \cdot \frac{K\pi}{x}, \text{ следи } f''(x) = \frac{1}{(1+K)^2} \cdot \\
 &K \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) + \frac{2}{(1+K)^3} \cdot K \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \cdot \frac{K\pi}{x} - \frac{\pi}{(1+K)^2} \cdot \frac{x \cdot K \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) - K}{x^2} =
 \end{aligned}$$

$-\frac{K\pi}{x^2(1+K)^2} \cdot \left(1 + \frac{2}{1+K} \cdot \frac{K\pi}{x} - \frac{\pi}{x} - 1\right) = \frac{K^2\pi^2}{(1+K)^3} \cdot \frac{1-K}{x^3}$. Из особина функције e^x следи $K > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge K < 0 \Leftrightarrow x < 0$, па следи $f''(x) \geq 0$ за $x \in \emptyset$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Из претходних резултата се до-
бија таблица

$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
---	+++
↗ ↘ ↗	↗ ↘ ↗
∩ ∩ ∩	∪ ∪ ∪



помоћу које се лако црта график.

18. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (2+x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Како је $f(-2) = 0 \neq \pm f(2)$, функција није ни парна ни непарна.

Нуле и знак: експоненцијална функција је позитивна. Следи $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$, $f(x) = 0$ за $x = -2$ и $f(x) > 0$ за $x \in (-2, 0) \cup (0, \infty)$.

Први извод: f је диференцијабилна на $\text{Dom}(f)$ и важи $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (2+x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^2 - x - 2)}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (x+1)(x-2)}{x^2}$.

Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x \in \{-1, 2\}$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$. За $x = -1$ се достиже локални максимум. За $x = 2$ се достиже локални минимум.

Асимптотика: кад $x \rightarrow \pm\infty$ важи $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, па је $f(x) = (x+2) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 + \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow \pm\infty$. Следи да функција има косу асимптоту $y = x + 3$ у $\pm\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$ (са десне стране). Како је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = 0$ (експоненцијална функција је „јача” од полиномне), следи да се график функције f „лепи” на праву $y = 0$ кад $x \rightarrow 0-$.

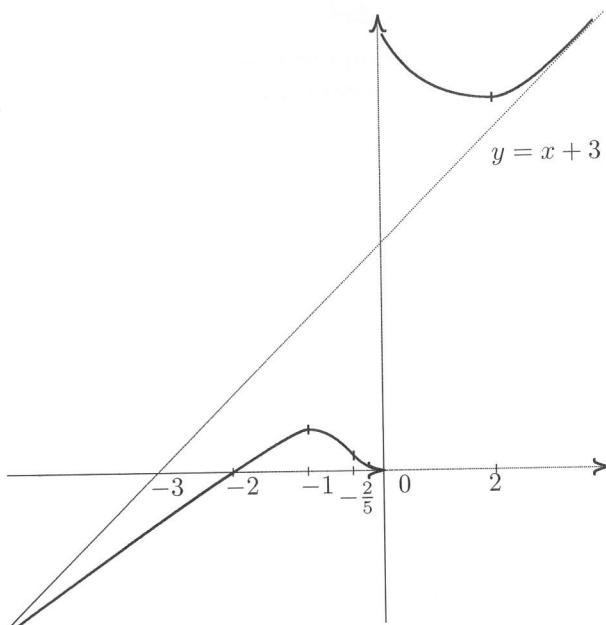
Други извод: f'' постоји на $\text{Dom}(f)$ и важи

$$f''(x) = \frac{\left[e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (x^2 - x - 2) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x - 1)\right] \cdot x^2 - e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^2 - x - 2) \cdot 2x}{x^4}$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \cdot \left[(x^2 - x - 2) - x^2(2x - 1) + 2x(x^2 - x - 2)\right] = \frac{(5x + 2) \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4}.$$

Следи $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{2}{5})$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$ и $f'' > 0 \Leftrightarrow (-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, \infty)$.

График:



Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, -\frac{2}{5})$	$(-\frac{2}{5}, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
---	+++	+++	+++	+++	+++
↗↗↗	↗↗↗	↘↘↘	↘↘↘	↘↘↘	↗↗↗
nnn	nnn	nnn	uuu	uuu	uuu

помоћу које се лако црта график.

19. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = (x-2) \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Решење. Домен: Да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Како је $f(2) = 0 \neq \pm f(-2)$, функција није ни парна ни непарна.

Нуле и знак: експоненцијална функција је позитивна. Следи $f(x) > 0$ за $x \in (2, \infty)$, $f(x) = 0$ за $x = 2$ и $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$.

Први извод: f је диференцијабилна на $\text{Dom}(f)$ и важи

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + (x-2) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^2 - x + 2)}{x^2}.$$

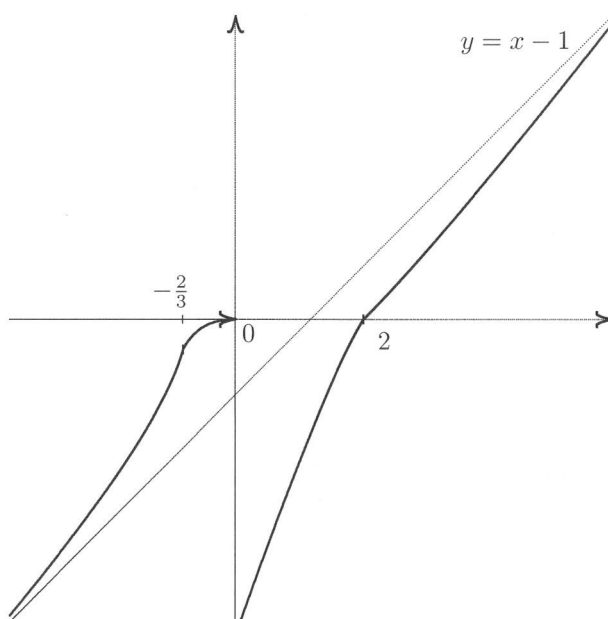
Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x \in \emptyset$ и $f'(x) < 0$ за $x \in \emptyset$.

Асимптотика: кад $x \rightarrow \pm\infty$ важи $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, па је

$$f(x) = (x-2) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = x - 1 - \frac{3}{2x} + \left(\frac{1}{x}\right)$$

кад $x \rightarrow \pm\infty$. Следи да функција има косу асимптоту $y = x - 1$ у $\pm\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$ (са десне стране). Како је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = 0$ (експоненцијална функција је „јача” од полиномне), следи да се график функције f „лепи” на праву $y = 0$ кад $x \rightarrow 0-$.

График:



Други извод: f'' постоји на $\text{Dom}(f)$ и важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x^4} \cdot \left\{ \left[e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (x^2 - x + 2) + e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x - 1) \right] \cdot x^2 \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{1}{x}} \cdot (x^2 - x + 2) \cdot 2x \right\} \\ &= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \cdot \left[(x^2 - x + 2) - x^2(2x - 1) + 2x(x^2 - x + 2) \right] \\ &= -\frac{(3x + 2) \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4}. \end{aligned}$$

Следи $f''(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{2}{3})$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ и $f'' > 0 \Leftrightarrow (-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
--- ↗↗↗ ∪∪∪	--- ↗↗↗ ∩∩∩	--- ↗↗↗ ∩∩∩	+++ ↗↗↗ ∩∩∩

помоћу које се лако црта график.

20. Нека је $f(x) = (1 + 3x)e^{\frac{1}{x-2}}$.

- (а) Одредити $a, b, c \in \mathbb{R}$ тако да важи $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$ кад $x \rightarrow \pm\infty$.
 (б) Испитати ток и нацртати график функције f .

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x - 2 \neq 0$, па је $Dom(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$. Због облика домена, функција не може бити ни парна, ни непарна ни периодична.

Нуле и знак: експоненцијална функција је позитивна. Следи $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$, $f(x) = 0$ за $x = -\frac{1}{3}$ и $f(x) > 0$ за $x \in (-\frac{1}{3}, 2) \cup (2, \infty)$.

Први извод: f је диференцијабилна на $Dom(f)$ и важи

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{\frac{1}{x-2}} + (3x+1) \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot [(3x^2 - 12x + 12) - (3x+1)]}{(x-2)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (3x^2 - 15x + 11)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x \in \{\alpha, \beta\}$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (\alpha, 2) \cup (2, \beta)$, где је $\alpha = \frac{15-\sqrt{93}}{6} \in (0, 1)$, а $\beta = \frac{15+\sqrt{93}}{6} \in (4, 5)$. За $x = \alpha$ се достиже локални максимум. За $x = \beta$ се достиже локални минимум.

Асимптотика: кад $x \rightarrow \pm\infty$ важи $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ па је

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

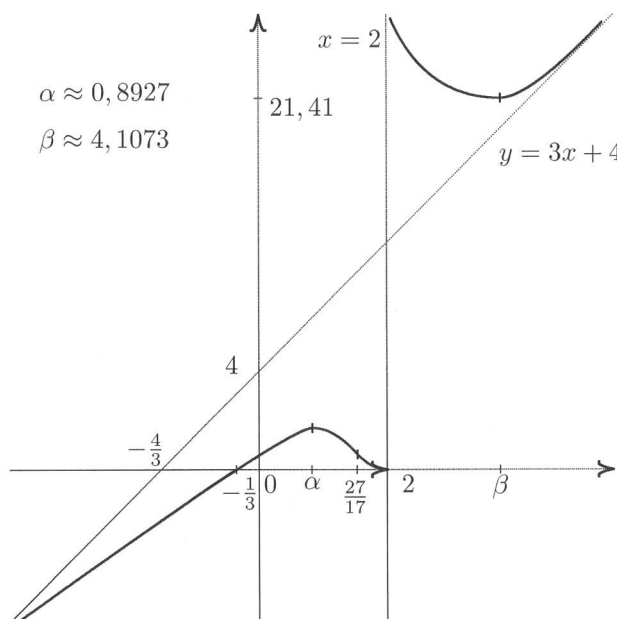
Следи $f(x) = (3x+1)e^{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})} = (3x+1) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 3x + 4 + \frac{17}{2x} + \left(\frac{1}{x}\right)$ кад $x \rightarrow \pm\infty$ (дакле, $a = 3$, $b = 4$, $c = \frac{17}{2}$), тј. функција има косу асимптоту $y = 3x + 4$ у $\pm\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 2$ (са десне стране). Како је $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = 0$ (експоненцијална функција је „јача” од полиномне), следи да се график функције f „лепи” на праву $y = 0$ кад $x \rightarrow 2-$.

Други извод: f'' постоји на $\text{Dom}(f)$ и важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{(x-2)^4} \cdot \left\{ \left[\left(-\frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} \right) (3x^2 - 15x + 11) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot (6x - 15) \right] \cdot (x-2)^2 - e^{\frac{1}{x}} \cdot (3x^2 - 15x + 11) \cdot 2(x-2) \right\} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4} \cdot \left[-(3x^2 - 15x + 11) + (x-2)^2(6x - 15) \right. \\ &\quad \left. - 2(x-2)(3x^2 - 15x + 11) \right] = \frac{(17x - 27) \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^4}. \end{aligned}$$

Следи $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, \frac{27}{17})$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{27}{17}$ и $f'' > 0 \Leftrightarrow (\frac{27}{17}, 2) \cup (2, \infty)$.

График:



Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, \alpha)$	$(\alpha, \frac{27}{17})$	$(\frac{27}{17}, 2)$	$(2, \beta)$	(β, ∞)
---	+++	+++	+++	+++	+++
↗↗↗	↗↗↗	↘↘↘	↘↘↘	↘↘↘	↗↗↗
nnn	nnn	nnn	uuu	uuu	uuu

помоћу које се лако црта график.

21. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right) \cdot e^{\frac{1}{3x}}$.

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Како је $f(1) = \frac{3}{2} \cdot e^{\frac{1}{3}}$ и $f(-1) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-\frac{1}{3}}$, следи $f(1) \neq \pm f(-1)$, па функција није ни парна ни непарна.

Нуле и знак: Како је $e^x > 0$ за свако реално x , следи да је знак функције f једнак знаку функције $x + \frac{1}{2x}$, тј. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Први извод: $f'(x) = \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{3x}} + \left(x + \frac{1}{2x}\right) \cdot e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left(-\frac{1}{3x^2}\right) = e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}\right) = e^{\frac{1}{3x}} \cdot \frac{6x^3 - 2x^2 - 3x - 1}{6x^3} = e^{\frac{1}{3x}} \cdot \frac{(x-1)(6x^2 + 4x + 1)}{6x^3}$. Како је $6x^2 + 4x + 1 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, следи $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = 1$, $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 1)$. За $x = 1$ функција f достиже локални минимум.

Асимптотика: како важи $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow \pm\infty$, следи

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{18x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{1}{3} + \frac{5}{9x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

кад $x \rightarrow \pm\infty$, па функција у $\pm\infty$ има косу асимптоту $y = x + \frac{1}{3}$ кад $x \rightarrow \pm\infty$. Како је $\frac{5}{9x} > 0$ за $x > 0$, следи да се функција у ∞ приближава асимптоти „одозго“. Како је $\frac{5}{9x} < 0$ за $x < 0$, следи да се функција у $-\infty$ приближава асимптоти „одоздо“.

Како важи $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(x + \frac{1}{2x}\right) \cdot e^{\frac{1}{3x}} = \{\infty \cdot \infty\} = \infty$, функција f има вертикалну асимптоту $x = 0$ (са десне стране).

Како важи $\lim_{x \rightarrow 0-} x \cdot e^{\frac{1}{3x}} = \{0 \cdot 0\} = 0$, по теореме о збиру граничних вредности, следи

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{2x}\right) \cdot e^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0-} x \cdot e^{\frac{1}{3x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \cdot e^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \cdot e^{\frac{1}{3x}}.$$

Последња гранична вредност се сменом $t = \frac{1}{3x}$ (функција $\frac{1}{3x}$ је непрекидна на $(-\infty, 0)$) трансформише у

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} t \cdot e^t &= \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \frac{\infty}{\infty} \\ t \text{ и } e^{-t} \text{ су диференцијабилне и } (e^{-t})' = -e^{-t} \neq 0 \end{array} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = -\frac{3}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{aligned}$$

(„коначна тачка”).

Потребно је израчунати и угао под којим крива „улази“ у тачку $(0, 0)$. На основу геометријског тумачења извода, тангенс нагиба „улазног”

угла се добија из

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}\right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \frac{1}{3x}, \text{ која је} \\ \text{непрекидна на } (-\infty, 0) \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - t - \frac{9}{2} \cdot t^2 - \frac{9}{2} \cdot t^3}{e^{-t}},\end{aligned}$$

а последња гранична вредност је једнака нули, што се добија нпр. након три примене Лопиталовог правила (слично поступку у одређивању $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$), тј. функција се „лепи“ на x -осу, кад $x \rightarrow 0-$.

Други извод:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}\right)\right)' \\ &= e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}\right) + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}\right] \\ &= e^{\frac{1}{3x}} \cdot \left(\frac{10}{9x^3} + \frac{2}{3x^4} + \frac{1}{18x^5}\right) = e^{\frac{1}{3x}} \cdot \frac{20x^2 + 12x + 1}{18x^5} \\ &= e^{\frac{1}{3x}} \cdot \frac{20 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{10}\right)}{18x^5}.\end{aligned}$$

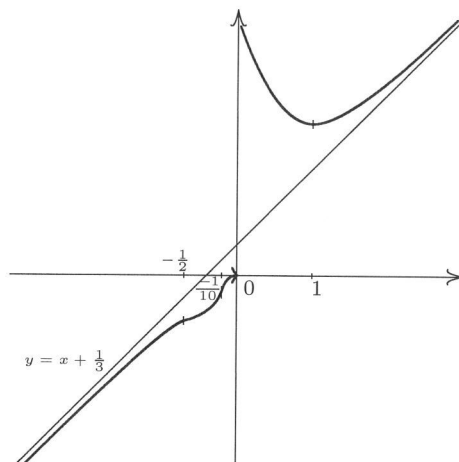
Следи $f''(x) > 0$ за $x \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}) \cup (0, \infty)$,
 $f''(x) = 0$ за $x \in \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\}$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{10}, 0)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{10})$	$(-\frac{1}{10}, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
---	---	---	+++	+++
↗↗↗	↗↗↗	↗↗↗	↘↘↘	↗↗↗
∩∩∩	∪∪∪	∩∩∩	∪∪∪	∪∪∪

помоћу које се лако црта график.

График:



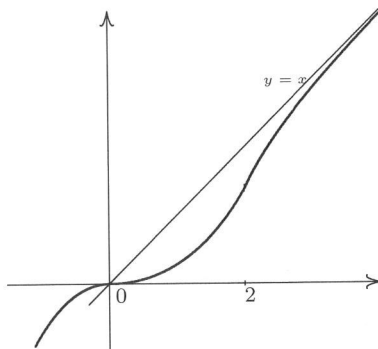
22. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = x \cdot |1 - e^{-x}|$.

Решење. Домен: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Како је $f(1) = 1 - \frac{1}{e}$ и $f(-1) = 1 - e$, следи $f(1) \neq \pm f(-1)$, па функција није ни парна ни непарна.

Нуле и знак: како је $|1 - e^{-x}| \geq 0$ и једнакост важи ако и само ако је $x = 0$, следи $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Први извод: за $x > 0$ следи $|1 - e^{-x}| = 1 - e^{-x}$ па важи $f'(x) = (1 - e^{-x}) + xe^{-x}$. Слично, за $x < 0$ важи $f'(x) = e^{-x} - 1 - xe^{-x}$. За $x = 0$ важи $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|1 - e^{-x}|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |1 - e^{-x}| = 0$. Следи $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $f'(x) < 0$ за $x \in \emptyset$. За $x = 0$ се не добија локални екстремум функције f .

График:



Асимптотика: иако је функција испод апсолутне вредности једнака нули за $x = 0$, функција је непрекидно-диференцијабилна у $x = 0$. Како важи $f(x) \sim xe^{-x}$ кад $x \rightarrow -\infty$, функција у $-\infty$ нема ни хоризонталну ни косу асимптоту и важи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Како важи $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, следи $f(x) = xe^{-x} + o(1)$ кад $x \rightarrow \infty$, па функција има косу асимптоту $y = x$ у ∞ .

Други извод: за $x > 0$ важи $f''(x) = e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = (2 - x)e^{-x}$. Слично, за $x < 0$ важи $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$. За $x = 0$ важи $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-x} + xe^{-x}}{x} \cdot \text{sgn } x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - (1 - x + o(x)) + x(1 + o(1))}{x} \cdot \text{sgn } x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x + o(x)}{x} \cdot \text{sgn } x \right) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn } x$, па како последња гранична вредност не постоји, следи да за $x = 0$ није дефинисан други извод.

Следи $f''(x) > 0$ за $x \in (0, 2)$, $f''(x) = 0$ за $x = 2$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
---	+++	+++
↗↗↗	↗↗↗	↗↗↗
∩∩∩	∪∪∪	∩∩∩

помоћу које се лако црта график.

23. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{|x+1|}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}}$.

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$ и $x+1 \neq 0$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

Нуле и знак: експоненцијална функција је позитивна. Следи $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $f(x) = 0$ за $x \in \emptyset$ и $f(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Први извод: f је диференцијабилна на $\text{Dom}(f)$. На $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ је $f(x) = \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}}$, па важи

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{1}{x+1}} + \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x+1}} \cdot (2x+1)}{x^2(x+1)}.$$

Следи да на $(-\infty, -1)$ важи $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x+1}} \cdot (2x+1)}{x^2(x+1)}$, па је $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$, $f'(x) = 0$ за $x = -\frac{1}{2}$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$. За $x = -\frac{1}{2}$ се достиже локални максимум.

Асимптотика: Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, функција има хоризонталну асимптоту $y = 1$ кад $x \rightarrow \infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, функција има хоризонталну асимптоту $y = -1$ кад $x \rightarrow -\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{e}{x} = \pm\infty$, функција има вертикалну асимптоту $x = 0$ кад $x \rightarrow 0 \pm$.

Како је $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty$ (експоненцијална функција је „јача” од полиномне), функција има вертикалну асимптоту $x = -1$ кад $x \rightarrow -1+$ (претходна гранична вредност се могла одредити и, на пример, Лопиталовим правилима; након смене $t = \frac{1}{x+1}$, добија се $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} = -\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{t} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(e^t)'}{t'} = -\lim_{t \rightarrow \infty} e^t = -\infty$).

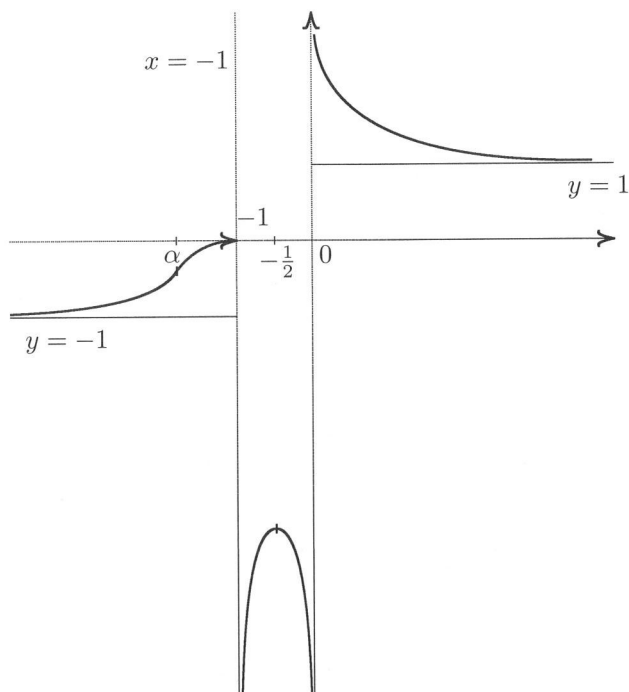
Како је $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0$, функција има коначну граничну тачку $(-1, 0)$ кад $x \rightarrow -1-$. Како је $\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} \cdot (2x+1)}{x^2(x+1)} = 0$ (доказ сличан као и за $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$), следи да се график функције f „лепи” на праву $y = 0$ кад $x \rightarrow -1-$.

Други извод: f'' постоји на $\text{Dom}(f)$. На $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x^4(x+1)^2} \cdot \left[e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) \cdot (2x+1) + 2 \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \right] \cdot x^2(x+1) \\ &\quad - e^{\frac{1}{x+1}} (2x+1) \cdot (2x(x+1) + x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x^3(x+1)^3} \cdot \left[x(2x+1) - 2x(x+1)^2 + (2x+1)(3x+2)(x+1) \right] \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{x^3(x+1)^3} \cdot [4x^3 + 11x^2 + 8x + 2].
 \end{aligned}$$

График:



Нека је $p(x) = 4x^3 + 11x^2 + 8x + 2$. Онда је $p'(x) = 12x^2 + 22x + 8 = 12 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Дакле, p расте на $(-\infty, -\frac{4}{3})$ и на $(-\frac{1}{2}, \infty)$, а опада на $(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2})$. Како је $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0$, следи да p има тачно једну нулу на $\mathbb{R}$ (и то на интервалу $(-\infty, -\frac{4}{3})$; нека је то $\alpha (\approx -1,78769)$).

Следи $f''(x) < 0$ за $x \in (\alpha, -1) \cup (-1, 0)$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ и $f'' > 0 \Leftrightarrow (-\infty, \alpha) \cup (0, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, \alpha)$	$(\alpha, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \infty)$
---	---	---	---	+++
↗↗↗	↗↗↗	↗↗↗	↘↘↘	↘↘↘
UUU	nnn	nnn	nnn	UUU

помоћу које се лако црта график.

24. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = -\frac{1}{|x|} + \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $|x| \neq 0$, $x^2 - 1 \neq 0$, тј. $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. Како је $f(-2) = -\frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ и $f(2) = -\frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, следи $f(-2) \neq \pm f(2)$, па функција није ни парна ни непарна.

Први извод:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{|x|^2} \cdot \operatorname{sgn} x + \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2} - \frac{2}{x^2+1} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1}, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)}, & \text{за } x \in (0, 1) \cup (1, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Следи $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Асимптотика: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (хоризонтална асимптота), $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (вертикална асимптота), $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\frac{\pi}{2} - 1$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{\pi}{2} - 1$. У $\pm 1 \pm$, пошто су коначне граничне тачке функције f , треба одредити и под којим угловима функција „улази” у њих: $\lim_{x \rightarrow 1\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{1-x^2}{x^2(1+x^2)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1\pm} -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2+1} = -2$, тј. углови под којима крива „улази” у дате тачке су 0 и $\operatorname{arctg}(-2)$.

Нуле и знак: како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и f опада на $(-\infty, -1)$, функција је негативна на овом интервалу. Како је $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$ и на $(-1, 0)$ функција f строго опада, то на овом интервалу постоји тачно једна нула функције (α). Дакле, на $(-1, \alpha)$ функција је позитивна, а на $(\alpha, 0)$ негативна. Како је $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) < 0$ и f расте на $(0, 1)$, функција је негативна на овом интервалу. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) > 0$ и f опада на $(1, \infty)$, функција је позитивна на овом интервалу.

Други извод: важи

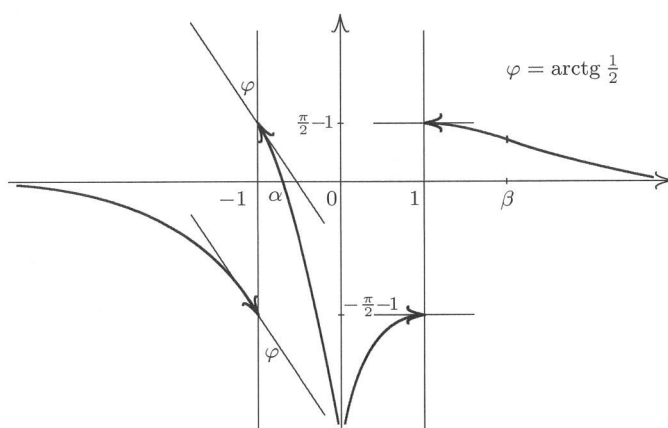
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2}, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ -\frac{2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 2 \cdot \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^3(x^2+1)^2}, & \text{за } x \in (0, 1) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Следи $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{2}} = \beta$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\beta, \infty)$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \beta)$.

Већина горњих резултата је садржана у следећој табели (недостају само подаци о угловима).

$(-\infty, -1)$	$(-1, \alpha)$	$(\alpha, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \beta)$	(β, ∞)
---	+++	---	---	+++	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$
$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cup \cup \cup$

График:



25. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{|x|+1}$.

Решење. Домен: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} (|x|+1 > 0)$.

Симетричност: Како је домен симетричан и важи $(\forall x \in \operatorname{Dom}(f)) f(x) = f(-x)$, дата функција је парна, па је довољно проучити је на $[0, \infty)$. На том скупу важи $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$.

Нуле и знак: За $x > 0$ важи $\frac{x}{x+1} > 0$, па је $\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} > 0$, тј. $f(x) > 0$ за $x > 0$. Важи $f(x) = 0$ за $x = 0$.

Први извод: $f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x^2 + (x+1)^2}$, па је $f'(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Асимптотика: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} = \frac{\pi}{4},$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила, } \frac{\infty}{\infty}, \frac{1}{x} \text{ и} \\ \arctg \frac{x}{x+1} - \frac{\pi}{4} \text{ су диференци-} \\ \text{јабилне и } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \end{array} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2 + (x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

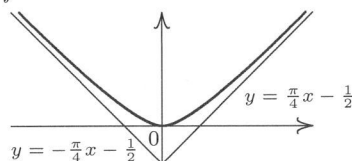
(коса асимптота $y = \frac{\pi}{4} \cdot x - \frac{1}{2}$ кад $x \rightarrow \infty$).

Други извод: $f''(x) = \frac{1}{x^2 + (x+1)^2} + \frac{x^2 + (x+1)^2 - x(2x + 2(x+1))}{[x^2 + (x+1)^2]^2} = \frac{2(x+1)}{[x^2 + (x+1)^2]^2}$, па је $f''(x) > 0$ за $x \in (0, \infty)$.

Из претходних резултата се до-
бија таблица

$(0, \infty)$
+++
↗ ↘ ↗
UUU

График:



помоћу које се лако црта график.

На интервалу $(-\infty, 0)$ функција се доцртава тако да буде осно симетрична у односу на праву $x = 0$.

26. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \arctg\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$, па је $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Парност, непарност, периодичност: због облика домена f не може бити периодична. Како за свако $x \in \text{Dom}(f)$ важи $f(x) = -f(-x)$, f је непарна, па ју је довољно испитати на $(0, \infty)$.

Нуле и знак: како је $x + \frac{1}{x} > 0$ за $x > 0$ и $\arctg x > 0$ за $x > 0$, следи $f(x) > 0$ за свако $x \in (0, \infty)$.

Први извод: за $x \in (0, \infty)$ важи

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 3x^2 + 1}.$$

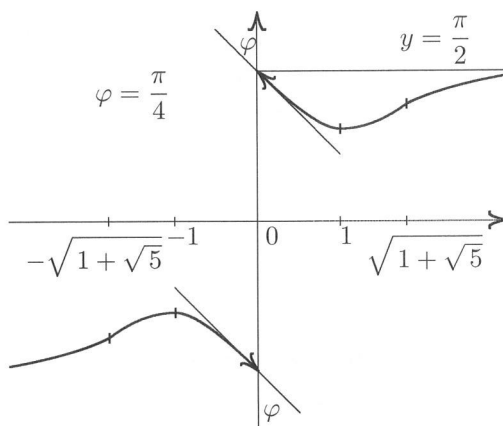
Следи да је (на $(0, \infty)$) $f' = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f' > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$ и $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, функција има коначну граничну тачку $(0, \frac{\pi}{2})$ у коју „улази” под углом чији је коефицијент правца

$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = -1$ (тј. под углом $\frac{3\pi}{4}$). Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, функција има хоризонталну асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ кад $x \rightarrow \infty$.

Други извод: $f''(x) = \frac{2x(x^4+3x^2+1)-(x^2-1)(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^4+3x^2+1)^2} \cdot (x^4+3x^2+1-(2x^4+x^2-3)) = -\frac{2x}{(x^4+3x^2+1)^2} \cdot (x^4-2x^2-4)$. Следи да је (решавање једначине квадратне по x^2 , одбацује се негативно решење те једначине, јер је $x^2 \geq 0$) $f'' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{1+\sqrt{5}}$, $f'' < 0 \Leftrightarrow x \in (\sqrt{1+\sqrt{5}}, \infty)$ и $f' > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \sqrt{1+\sqrt{5}})$.

График:



Из претходних резултата се добија таблица

$(0, 1)$	$(1, \sqrt{1+\sqrt{5}})$	$(\sqrt{1+\sqrt{5}}, \infty)$
+++ ↘ ↘ ↘ uuu	+++ ↗ ↗ ↗ uuu	+++ ↗ ↗ ↗ nnn

помоћу које се лако црта график.

27. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = x \log_{|x|} 2$.

Решење. Домен: у бази логаритма сме се налазити позитиван број различит од 1, па је $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Симетричност: како је домен симетричан и важи $(\forall x \in Dom(f)) f(x) = -f(-x)$, дата функција је непарна, па је довољно проучити је на $(0, 1) \cup (1, \infty)$. На овом скупу је $f(x) = x \log_x 2 = \ln 2 \cdot \frac{x}{\ln x}$.

Нуле и знак: за $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ важи $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0$, па следи $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

Први извод: $f'(x) = \ln 2 \cdot \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$,

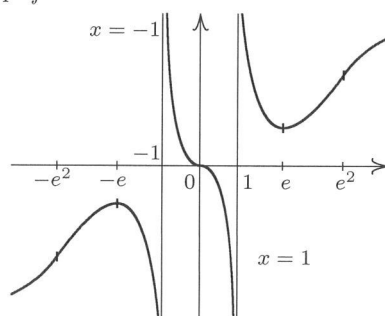
па је $f'(x) > 0$ за $x \in (e, \infty)$, $f'(x) = 0$ за $x = e$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (0, 1) \cup (1, e)$. За $x = e$ функција достиже локални минимум.

Асимптотика: како је

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm \infty,$$

права $x = 1$ је вертикална асимптота функције (са обе стране).

График:



Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 0$, тачка $(0, 0)$ је коначна гранична тачка функције и график се „лепи“ на праву $y = 0$ кад $x \rightarrow 0+$ (заправо, ово је постала гранична тачка зато што је (због симетрије) домен „вештачки“ подељен).

Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, функција нема ни косу ни хоризонталну асимптоту.

Други извод: $f''(x) = \ln 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \ln 2 \cdot \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$, па је $f''(x) > 0$ за $x \in (1, e^2)$, $f''(x) = 0$ за $x = e^2$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (0, 1) \cup (e^2, \infty)$. Тачке $(0, 0)$ и $(e^2, \frac{e^2 \ln 2}{2})$ су превојне тачке функције.

Из претходних резултата се добија таблица

$(0, 1)$	$(1, e)$	(e, e^2)	(e^2, ∞)
---	+++	+++	+++
$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow$
$\cap \cap \cap$	$\cup \cup \cup$	$\cup \cup \cup$	$\cap \cap \cap$

помоћу које се лако црта график. На $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ функција се доцртава тако да буде централно симетрична у односу на тачку $(0, 0)$.

28. Испитати ток и нацртати график функције $f(x) = \frac{\arctg(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x)$.

Решење. Домен: $Dom(f) = (0, \infty)$ (због корена је $x \geq 0$, а због дељења $x \neq 0$).

Нуле и знак: како је $\sqrt{x} > 0$, следи $\arctg \sqrt{x} > 0$, тј. $f(x) > 0$ за свако $x \in Dom(f)$.

Први извод:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} - \arctg \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - (x+1) \arctg \sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)}.$$

Асимптотика: како је $t = \sqrt{x}$ непрекидна функција на $[0, \infty)$, следи

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t + o(t)}{t} = 1 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x} - (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(x+1)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t - (1+t^2) \operatorname{arctg} t}{2t^3(1+t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t - (1+t^2) \left(t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \right)}{2t^3 + o(t^3)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t - \left(t + \frac{2}{3}t^3 + o(t^3) \right)}{2t^3 + o(t^3)} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(тачка $(0, 1)$ је „коначна тачка“, у њу функција „улази“ под углом $\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$). Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, функција има хоризонталну асимптоту $y = 0$ кад $x \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{Други извод: } f''(x) &= \frac{1}{2x^3(x+1)^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. x^{\frac{3}{2}}(x+1) - \left(\sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right) \left(\frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \right) \right] = \frac{\sqrt{x}}{2x^3(x+1)^2} \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{x} \cdot \right. \\ &\quad \left. ((5x+3)(x+1) - 2x(x+1)) + \sqrt{x}(5x+3) \right] = \frac{1}{2x^{\frac{5}{2}}} \cdot \left[3 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2} \right]. \end{aligned}$$

Нека је $g(x) = 3 \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}(5x+3)}{(x+1)^2}$. Онда је

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{3}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\left(5\sqrt{x} + \frac{5x+3}{2\sqrt{x}} \right) (x+1)^2 - \sqrt{x}(5x+3) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)^3} \cdot \left[3(x+1)^2 - (x+1)(15x+3) + 4x(5x+3) \right] = \frac{8x^2}{2\sqrt{x}(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Дакле, g расте на $(0, \infty)$, а како је $g(0) = 0$, следи да је $g(x) \geq 0$ за $x \in (0, \infty)$. Како g строго расте на $(0, \infty)$, важи $g(x) > 0$ за $x > 0$.

Следи $f''(x) > 0$ на $\operatorname{Dom}(f)$.

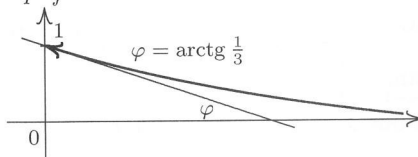
По претходном је f' растућа непрекидна функција на $(0, \infty)$, па како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, следи $f'(x) < 0$ на $\operatorname{Dom}(f)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(0, \infty)$
+++
↘ ↘ ↘
UUU

помоћу које се лако црта график.

График:



29. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[|xn|]}{|xn|} \cdot \arcsin \frac{\sqrt[n]{|x|}}{1+x^{2n}} - \pi \operatorname{arctg} e^{x-1} \right)$$

$[x]$ означава највећи цео број, не мањи од реалног броја x).

Решење. Домен: да не би дошло до дељења нулом, мора бити $x \neq 0$. Како је $|xn| - 1 < [|xn|] \leq |xn|$, за $x \neq 0$ следи $\frac{|xn|-1}{|xn|} < \frac{[|xn|]}{|xn|} \leq 1$, па по леми о два полицајца постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|xn|]}{|xn|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|xn|]}{|xn|} = 1$.

Ако је $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|x|}}{1 + x^{2n}}$, онда L постоји за свако реално x и важи

$$L = \begin{cases} 0, & \text{за } |x| > 1 \text{ и } x = 0 \\ 1, & \text{за } 0 < |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{за } |x| = 1 \end{cases}, \text{ па је}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\pi \operatorname{arctg} e^{x-1}, & \text{за } |x| > 1 \\ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{4}, & \text{за } x = 1 \\ \frac{\pi}{6} - \pi \operatorname{arctg} e^{-2}, & \text{за } x = -1 \\ \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} e^{x-1}, & \text{за } 0 < |x| < 1 \end{cases}$$

(и важи $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Први извод: како је $(\operatorname{arctg} e^{x-1})' = \frac{e^{x-1}}{1 + e^{2x-2}}$, следи

$$f'(x) = -\pi \cdot \frac{e^{x-1}}{1 + e^{2x-2}} \text{ за } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Следи да f опада на интервалима $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Други извод: $f''(x) = -\pi \cdot \frac{e^{x-1}(1 + e^{2x-2}) - e^{x-1} \cdot 2e^{2x-2}}{(1 + e^{2x-2})^2} = \frac{\pi e^{x-1}}{(e^{x-1} + 1)^2} \cdot$

$(e^{2x-2} - 1)$ за $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Следи да је f конкавна на интервалима $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, а конвексна на $(1, \infty)$.

Асимптотика: како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = 0$, права $y = 0$ је хоризонтална асимптота функције кад $x \rightarrow -\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (-\pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = -\frac{\pi^2}{2}$, права $y = -\frac{\pi^2}{2}$ је хоризонтална асимптота функције кад $x \rightarrow \infty$.

Како је $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-\pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = -\pi \operatorname{arctg} e^{-2}$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} e^{-2}$ и $f(-1) = \frac{\pi}{6} - \pi \operatorname{arctg} e^{-2}$, у тачки $x = -1$ функција има прекид (и са лева и са десна). Како је $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (-\pi \cdot \frac{e^{x-1}}{1 + e^{2x-2}}) = -\pi \cdot \frac{e^{-2}}{1 + e^{-2}}$, функција „прилази” тачкама $(-1, -\pi \operatorname{arctg} e^{-2})$ и $(-1, \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} e^{-2})$, слева и десна, редом, под углом $\pi - \operatorname{arctg}(\pi \cdot \frac{e^2}{1+e^2})$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-\pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = -\frac{\pi^2}{4}$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} e^{x-1}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}$ и $f(1) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{4}$, у тачки $x = 1$ функција има

прекид (и са лева и са десна). Како је $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\pi \cdot \frac{e^{x-1}}{1 + e^{2x-2}} \right) = -\frac{\pi}{2}$, функција „прилази” тачкама $(1, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4})$ и $(-1, -\frac{\pi^2}{4})$, слева и десна, редом, под углом $\pi - \arctg(\frac{\pi}{2})$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \arctg e^{x-1} \right) = \frac{\pi}{2} - \pi \arctg e^{-1}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\pi \cdot \frac{e^{x-1}}{1 + e^{2x-2}} \right) = -\pi \cdot \frac{e}{1 + e^2}$, функција „прилази” тачки $(0, \frac{\pi}{2} - \pi \arctg e^{-1})$, и слева и десна, под углом $\pi \arctg(\pi \cdot \frac{e}{1 + e^2})$.

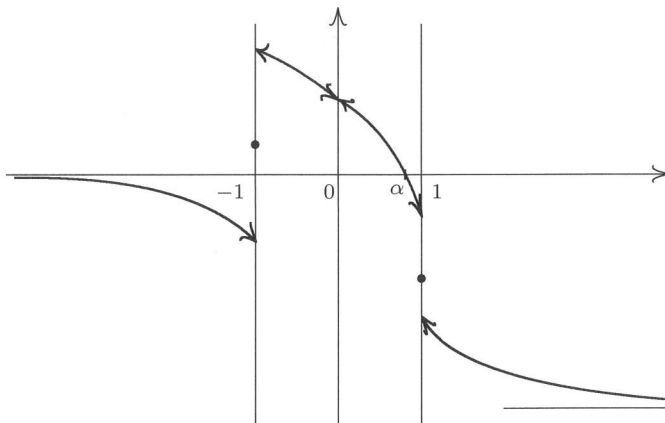
Нуле и знак: како је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ и f опада на $(-\infty, -1)$, функција је негативна на овом интервалу (тривијално је и $f(-1) < 0$). Како је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) > 0$ и f опада на $(-1, 0)$, функција је позитивна на овом интервалу. Како f строго опада на $(0, 1)$, важи $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) > 0$ и $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) < 0$, па на овом интервалу f има тачно једну нулу (нека је то α) и позитивна је на $(0, \alpha)$, а негативна на $(\alpha, 1)$ (тривијално је $f(-1) < 0$). Како је $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) < 0$ и f опада на $(1, \infty)$, следи да је f негативна на $(1, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \alpha)$	$(\alpha, 1)$	$(1, \infty)$
---	---	+++	---	---
$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\searrow \searrow \searrow$
$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cap \cap \cap$	$\cup \cup \cup$

помоћу које се лако црта график.

График:



30. Испитати ток и нацртати график функције $y = y(x)$ задате параметарски са $x(t) = t^3 - 3\pi$, $y(t) = t^3 - 6 \arctg t$, за $t \in \mathbb{R}$.

Решење. Домен: функција $x(t)$ је бијекција $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$, па је параметарска функција добро дефинисана и свакој вредности x одговара тачно једна вредност y .

Први извод: како је $x'(t) = 3t^2$, $\frac{dy}{dx}(t)$ је дефинисано за $t \neq 0$ (односно, за $x \neq -3\pi$). За $t \neq 0$ важи

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - \frac{6}{1+t^2}}{3t^2} = \frac{t^4 + t^2 - 2}{t^2(1+t^2)} = \frac{(t-1)(t+1)(t^2+2)}{t^2(t^2+1)},$$

па $y(x)$ расте за $t \in (-\infty, -1)$ и за $x \in (1, \infty)$, а опада на $(-1, 0)$ и за $x \in (0, 1)$, тј. расте за $x \in (-\infty, -1-3\pi)$ и за $x \in (1-3\pi, \infty)$, а опада за $x \in (-1-3\pi, -3\pi)$ и за $x \in (-3\pi, 1-3\pi)$. Тачка $(-1-3\pi, -1+\frac{3\pi}{2})$ је тачка локалног максимума, а $(1-3\pi, 1-\frac{3\pi}{2})$ је тачка у којој функција достиже локални минимум.

Асимптотика: $x(t) \rightarrow \pm\infty$ ако и само ако $t \rightarrow \pm\infty$. Како $\frac{dy}{dx}(t) \rightarrow 1$ кад $x \rightarrow \pm\infty$ и како је $y(t) - 1 \cdot x(t) = 3\pi - 6 \arctg t$, важи $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - 1 \cdot x(t)) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t) - 1 \cdot x(t)) = 6\pi$, па је $y = x$ коса асимптота функције кад $x \rightarrow \infty$, а $y = x + 6\pi$ коса асимптота функције кад $x \rightarrow -\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow -3\pi} y(t) =$

$\lim_{t \rightarrow 0} (t^3 - 6 \arctg t) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -3\pi \pm} \frac{dy}{dx}(t) = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+2)}{t^2(t^2+1)} = -\infty$, у тачки $(-3\pi, 0)$ функција је непрекидна и није диференцијабилна. У њој се график функције „лепи“ на праву $x = -3\pi$.

Нуле и знак: како функција строго расте на $(-\infty, -1-3\pi)$, тежи ка $-\infty$ кад $x \rightarrow -\infty$ и вредност у $-1-3\pi$ јој је $y(-1) = -1 + \frac{3\pi}{2} > 0$, има тачно једну нулу на овом интервалу (нека је то α ; важи $\alpha \approx -16$). Функција строго опада на $(-1-3\pi, 1-3\pi)$, па на овом интервалу има највише једну нулу, а то је -3π . Како функција строго расте на $(1-3\pi, \infty)$, тежи ка ∞ кад $x \rightarrow \infty$ и вредност у $1-3\pi$ јој је $y(1) = 1 - \frac{3\pi}{2} < 0$, има тачно једну нулу на овом интервалу (нека је то β ; важи $\beta \approx -3$). Следи и да је $y(x) > 0$ за $x \in (\alpha, -3\pi) \cup (\beta, \infty)$, док је $y(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -1-3\pi) \cup (-3\pi, \beta)$.

Други извод: за $t \neq 0$ (тј. $x \neq -3\pi$) је

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}(t) &= \frac{1}{(x'(t))^3} \cdot (y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)) \\ &= \frac{1}{27t^6} \cdot \left((6t + \frac{12t}{(1+t^2)^2}) \cdot 3t^2 - 6t \cdot (3t^2 - \frac{6}{1+t^2}) \right) = \frac{4(2t^2+1)}{3t^5(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

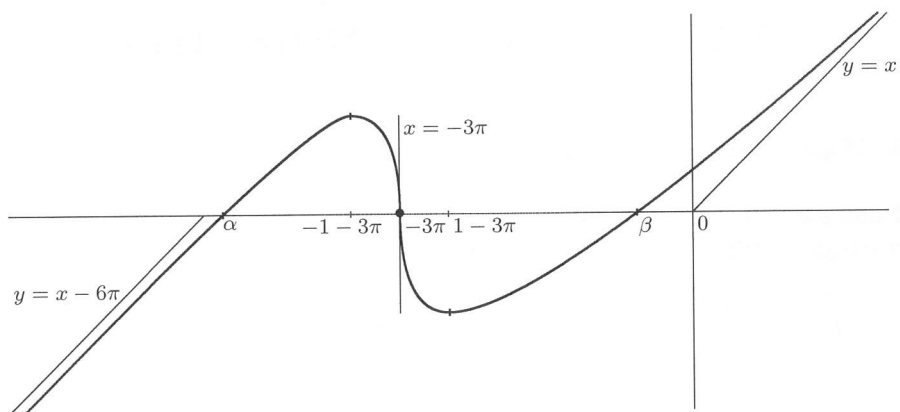
Следи $\frac{d^2y}{dx^2}(t) < 0$ за $t \in (-\infty, 0)$, а $\frac{d^2y}{dx^2}(t) > 0$ за $t \in (0, \infty)$, тј. функција је конкавна за $x \in (-\infty, -3\pi)$, а конвексна за $x \in (-3\pi, \infty)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, \alpha)$	$(\alpha, -1-3\pi)$	$(-1-3\pi, -3\pi)$	$(-3\pi, 1-3\pi)$	$(1-3\pi, \beta)$	(β, ∞)
— — — ↗ ↗ ↗ ∩ ∩ ∩	+++ ↗ ↗ ↗ ∩ ∩ ∩	+++ ↘ ↘ ↘ ∩ ∩ ∩	— — — ↘ ↘ ↘ ∪ ∪ ∪	— — — ↗ ↗ ↗ ∪ ∪ ∪	+++ ↗ ↗ ↗ ∪ ∪ ∪

помоћу које се лако црта график.

График:



7. ТЕХНИКЕ ИНТЕГРАЛНЕЊА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

1. Израчунати $\int_0^1 \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} &= \int_0^1 \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 + 1})^2} dx \\ &= \int_0^1 (x - \sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \int_0^1 (2x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2 + 1}) dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} + x - \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Друго решење.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \text{sh } t \\ dx = \text{ch } t dt \end{array} \right\} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\text{ch } t}{(\text{sh } t + \text{ch } t)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\frac{e^t + e^{-t}}{2}}{e^{2t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (e^{-t} + e^{-3t}) dt \\ &= \left[-e^{-t} - \frac{e^{-3t}}{3} \right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^3} \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot [4 - 3(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)^3] = \frac{7 - 4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

2. Израчунати $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0, 1]$, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x+1 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^2 - t^3}{t^2 + t^3} \cdot 6t^5 dt \\ &= (-6) \cdot \int_1^{\sqrt[6]{2}} \frac{t^6 - t^5}{t+1} dt = (-6) \cdot \int_1^{\sqrt[6]{2}} (t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2 \\ &\quad + \frac{2}{t+1}) dt = (-6) \left[\frac{t^6}{6} - \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} - 2t + 2 \ln|t+1| \right]_1^{\sqrt[6]{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{52}{5} + 12\sqrt[6]{2} - 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt{2} - 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 12 \cdot \frac{2^{\frac{5}{6}}}{5} + 12 \ln 2 - 12 \ln(1 + \sqrt[6]{2}).$$

3. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x(1 + \ln^2 x)} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[1, \infty)$ и позитивна. Како је $\frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x(1 + \ln^2 x)} \sim \frac{\pi}{2x \ln^2 x}$ кад $x \rightarrow \infty$ и $2 > 1$, дати интеграл конвергира (несвојствен Риманов интеграл). Даље је

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\ln x)}{x(1 + \ln^2 x)} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + y^2} dy \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \operatorname{arctg} y \\ dz = \frac{dy}{1 + y^2} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

4. Израчунати $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $(0, \infty)$ и позитивна. Како је $\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ кад $x \rightarrow 0+$ и $\frac{1}{3} < 1$, односно $\frac{1}{(x+1)\sqrt[3]{x}} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ кад $x \rightarrow \infty$ и $\frac{4}{3} > 1$, дати интеграл конвергира (несвојствен Риманов интеграл). Даље је $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{3t dt}{(t+1)(t^2 - t + 1)}$. По теореме о растављању рационалне функције, постоје $A, B, C \in \mathbb{R}$, тако да важи $\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{3t}{(t+1)(t^2-t+1)}$. Следи $-A = B = C = 1$, па је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t-1+3}{t^2-t+1} \right) dt \\ &= \left[\ln \left| \frac{\sqrt{(t^2-t+1)}}{t+1} \right| + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{2\pi \cdot \sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

5. Израчунати $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0, \infty)$ и позитивна. Како је $\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} \sim \frac{1}{x^4}$ кад $x \rightarrow \infty$ и $4 > 1$, дати

интеграл конвергира (несвојствен Риманов интеграл). По теореме о растављању рационалне функције, постоје $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, тако да важи $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$. Следи $A = B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$, па је

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) \right] \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+1} \right] \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Израчунати $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x}$, где је $\alpha > 0$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[1, \infty)$, па је интеграбилна на $[1, M]$ за свако $M > 1$. Она је и ненегативна и важи $\frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ кад $x \rightarrow \infty$, па дати интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл). Следи $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha+1}+2x} = \int_1^\infty \frac{x^{\alpha-1}dx}{x^\alpha(x^\alpha+2)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = x^\alpha \\ dt = \alpha x^{\alpha-1} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha} \cdot \int_1^\infty \frac{dt}{t(t+2)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \int_1^\infty \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right] dt = \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[\ln \frac{t}{t+2} \right]_1^\infty = \frac{\ln 3}{2\alpha}.$

7. Израчунати $\int_1^\infty \frac{dx}{(x^5+x^3) \cdot \sqrt{x^2-1}}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $(1, \infty)$ и позитивна. Како је $\frac{1}{(x^5+x^3) \cdot \sqrt{x^2-1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}}$ кад $x \rightarrow 1+$ и $\frac{1}{2} < 1$, односно $\frac{1}{(x^5+x^3) \cdot \sqrt{x^2-1}} \sim \frac{1}{x^6}$ кад $x \rightarrow \infty$ и $6 > 1$, дати интеграл конвергира (несвојствен Риманов интеграл). Даље је

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \frac{dx}{(x^5+x^3) \cdot \sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 = t^2, xdx = tdt \end{array} \right\} \\ &= \int_1^\infty \frac{xdx}{(x^6+x^4)\sqrt{x^2-1}} = \int_0^\infty \frac{tdt}{t((t^2+1)^3 + (t^2+1)^2)} \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2(t^2+2)}. \end{aligned}$$

По теореме о растављању рационалне функције, постоје A, B, C, D, E ,

$F \in \mathbb{R}$, тако да је $\frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2} + \frac{Et+F}{t^2+2} = \frac{1}{(t^2+1)^2(t^2+2)}$. Следи $A = C = E = 0$, $B = -1$, $D = F = 1$. Како је $\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}$, следи $\int \frac{1}{(x^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \arctg x + C$, па је

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2} = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \arctg x \right]_0^\infty - \left[\arctg x \right]_0^\infty + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

8. Израчунаи $\int_1^2 \frac{dx}{1+x+\sqrt{2x-x^2}}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи да је

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{1+x+\sqrt{2x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{1+x+\sqrt{1-(x-1)^2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = 1 + \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{2 + \sin t + \cos t} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \tg \frac{t}{2}, \quad dt = \frac{2dz}{1+z^2}, \\ \sin t = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{2-2z^2}{(z^2+1)(z^2+2z+3)} dz, \end{aligned}$$

па је, након растављања подинтегралне рационалне функције,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(-\frac{z-1}{z^2+1} + \frac{(z+1)-2}{z^2+2z+3} \right) dz \\ &= \left[\arctg z - \frac{1}{2} \cdot \ln(z^2+1) + \frac{1}{2} \cdot \ln(z^2+2z+3) - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctg \frac{z+1}{\sqrt{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot (\ln 6 - \ln 3) - \sqrt{2} \cdot \left(\arctg \sqrt{2} - \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

9. Израчунаи $\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решење. Функција $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ је непрекидна на $[-\frac{1}{2}, \infty)$, па је интеграбилна на интервалу $[-\frac{1}{2}, M]$ за свако $M > -\frac{1}{2}$. Како је $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \sim \frac{1}{x^2}$ кад $x \rightarrow \infty$, тражени интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл). Следи:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = x + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{dt}{(t+\frac{1}{2}) \cdot \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} y \\ dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{dy}{\cos^2 y} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dy}{\cos^2 y}}{\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} y + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\cos y}} \\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{3} \sin y + \cos y} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена} \\ z = \operatorname{tg} \frac{t}{2} \end{array} \right\} = 2 \cdot \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{(-4)dt}{t^2 - 2\sqrt{3}t - 1} = \int_0^1 \frac{(t - \sqrt{3} - 2) - (t - \sqrt{3} + 2)}{(t - \sqrt{3} - 2)(t - \sqrt{3} + 2)} dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{t - \sqrt{3} + 2} - \frac{1}{t - \sqrt{3} - 2} \right] dt = \ln \left| \frac{t - \sqrt{3} + 2}{t - \sqrt{3} - 2} \right| \Big|_0^1 = \ln(3 + 2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Друго решење.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sh} t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt \end{array} \right\} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t dt}{\frac{\sqrt{3} \operatorname{sh} t + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ch} t} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh} t + \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^t dt}{e^{2t} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^t - 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } y = e^t \\ dy = e^t dt \end{array} \right\} \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \int_1^{\infty} \frac{dy}{(y + \sqrt{3})(y - \frac{1}{\sqrt{3}})} = \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{y - \frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{y + \sqrt{3}} \right] dy \\
&= \ln \left| \frac{y - \frac{1}{\sqrt{3}}}{y + \sqrt{3}} \right| \Big|_1^{\infty} = \ln(3 + 2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

10. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$.

Решење. Како је $|2 \sin x - \cos x + 5| \geq 5 - |2 \sin x| - |\cos x| \geq 5 - 2 - 1 = 2 > 0$, подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } y \text{ другом интегра-} \\ \text{лу } u = x - 2\pi, du = dx \end{array} \right\} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \\
&\quad + \int_{-\pi}^0 \frac{du}{2 \sin u - \cos u + 5} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \left(t + \frac{1}{3} \right) \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \pi = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \pi.$$

11. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)}.$

Решење. Како је $\cos x \geq -1$, следи $3 + \cos x \geq 2$, $2 + \cos x \geq 1$, па је функција $\frac{1}{(3+\cos x)(2+\cos x)}$ непрекидна. Следи да тражени интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)} &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)} \\ &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена у другом интегралу} \\ t = x - 2\pi, dt = dx \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)} + \int_{-\pi}^0 \frac{dt}{(3 + \cos t)(2 + \cos t)} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)(2 + \cos x)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{(t^2+2)(t^2+3)} dt. \end{aligned}$$

По теорему о растављању рационалне функције, следи $\frac{1+t^2}{(t^2+2)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+2} + \frac{Ct+D}{t^2+3}$. Због парности следи $A = C = 0$, а решавањем система се добија $B = -1, D = 2$. Следи

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{(t^2+2)(t^2+3)} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{t^2+2} + \frac{2}{t^2+3} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \pi. \end{aligned}$$

12. Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{(5 + 3 \cos x)^2} dx.$

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{(5 + 3 \cos x)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\left(5 + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{t}{t^2+4} \right]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{1}{5} + \left[\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right]_0^1 \right] = \frac{2 + 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{80}. \end{aligned}$$

13. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^2 x}$.

Решење. Како је подинтегрална функција непрекидна, дати интеграл постоји ($\sin^4 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow |\sin x| = |\cos x| = 0$, што је немогуће). Како је подинтегрална функција π периодична и како су интеграли по периодима једнаки, следи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^2 x} = 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^2 x} \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\cos^2 x (\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{\cos^2 x})} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{array} \right\} = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1} dt \\ &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} dt = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} dt. \end{aligned}$$

Како је $\frac{t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)} = \frac{At + B}{t^2 + t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 - t + 1}$ за неке $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, решавањем система се добија $A = C = 0, B = D = \frac{1}{2}$. Следи

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 - t + 1} + \frac{1}{t^2 + t + 1} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right] dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(t + \frac{1}{2}\right) \right) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\pi + \pi) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \pi. \end{aligned}$$

14. Израчунати $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{|\sin x| + 2|\cos x|}{|\cos x| + 2|\sin x|} dx$.

Решење. Како је $|\cos x| + 2|\sin x| > 0$ (не може бити $\cos x = \sin x = 0$), подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Такође, подинтегрална функција је $\frac{\pi}{2}$ -периодична, па се дати интеграл рачуна по интервалу чија је дужина једнака дужини два периода. Следи

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{|\sin x| + 2|\cos x|}{|\cos x| + 2|\sin x|} dx &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin x| + 2|\cos x|}{|\cos x| + 2|\sin x|} dx \\ &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{1 + 2 \operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{t+2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)(t^2+1)} dt.$$

Подинтегрална функција у последњем интегралу је рационална, па по теорему о растављању рационалне функције важи $\frac{t+2}{(t+\frac{1}{2})(t^2+1)} = \frac{A}{t-\frac{1}{2}} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$, па се решавањем система једначина добија $A = \frac{6}{5}$, $B = -\frac{6}{5}$, $C = \frac{8}{5}$. Следи да је дати интеграл једнак

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{6}{t+\frac{1}{2}} - \frac{6t}{1+t^2} + \frac{8}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[6 \ln \left| t + \frac{1}{2} \right| - 3 \ln |1+t^2| + 8 \operatorname{arctg} t \right] \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[3 \cdot \ln \left(\frac{(t+\frac{1}{2})^2}{t^2+1} \right) + 8 \operatorname{arctg} t \right] \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{5} \left(3 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{(t+\frac{1}{2})^2}{t^2+1} \right) - 3 \cdot \ln \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{5} \cdot (6 \ln 2 + 4\pi). \end{aligned}$$

15. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{t \sin^2 t}{1 + |\sin t|} dt$.

Решење. Како је $1 + |\sin t| \geq 1$, подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{t \sin^2 t}{1 + |\sin t|} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = x + \pi \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int_{-\pi}^\pi \frac{(x+\pi) \sin^2(x+\pi)}{1 + |\sin x|} dx.$$

Слично претходном, постоје и $\int_{-\pi}^\pi \frac{x \sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx$ и $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx$, па је $I = \int_{-\pi}^\pi \frac{x \sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx + \pi \cdot \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx$. Притом је интервал по ком се врши интеграција симетричан, подинтегрална функција у првом интегралу је непарна, а у другом парна, па важи

$$\begin{aligned} I &= \pi \cdot \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx = 2\pi \cdot \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + |\sin x|} dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx + 2\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } y \text{ у првом интегралу} \\ y = \pi - x, dx = -dy \end{array} \right\} = 2\pi \cdot \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\pi - y)}{1 + \sin(\pi - y)} (-dy) \\ &\quad + 2\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx = 4\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin^2 y}{1 + \sin y} dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = y - \frac{\pi}{2} \\ dz = dy \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 z}{1 + \cos z} dz = 4\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos z - 1 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{z}{2}} \right) \\
&= 4\pi \cdot \left[\sin z - z + \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \cdot \left(1 - \frac{\pi}{2} + 1 \right) = 2\pi \cdot (4 - \pi)
\end{aligned}$$

16. Израчунати $\int_0^{\frac{9\pi}{4}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|}$.

Решење. Како је $|\sin x| + |\cos x| > 0$ (не може бити $\sin x = \cos x = 0$), функција $\frac{1}{|\sin x| + |\cos x|}$ је непрекидна на $\left[0, \frac{9\pi}{4}\right]$, па дати интеграл постоји. Како је подинтегрална функција $\frac{\pi}{2}$ -периодична и важи $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, следи да интеграл дате функције има исту вредност на свим интервалима облика $\left[\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right]$ за $k \in \mathbb{Z}$. Следи

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{9\pi}{4}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|} = 9 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|} \\
&= \frac{9}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|} = \frac{9}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\
&= \frac{9}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = (-9) \cdot \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} \\
&= -\frac{9}{2} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \frac{t-1}{\sqrt{2}} \\ dz = \frac{dt}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{9}{2} \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{\sqrt{2}dz}{z^2 - 1} = -\frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{1}{z^2 - 1} dz.
\end{aligned}$$

Подинтегрална функција у последњем интегралу је рационална, па по теорему о растављању рационалне функције важи $\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$, па се решавањем система једначина добија $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Следи да је дати интеграл једнак

$$\begin{aligned}
&-\frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right] dz = -\frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \left[\ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \\
&= \frac{9}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

17. Израчунати $I(a) = \int_0^\pi \frac{(a + \cos x) dx}{a^2 + 2a \cos x + 1}$ за $a \in \mathbb{R}$.

Решење. Ако је $a \in \{-1, 1\}$, подинтегрална функција није дефинисана, јер долази до дељења нулом. На пример, за $a = 1$ добија се $\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} dx$, па је подинтегрална функција једнака $\frac{1}{2}$ свуда сем за $x = \pi$. У тачки $x = \pi$ функција има сингуларитет, али је он отклоњив, јер се дата функција може додефинисати по непрекидности. Следи, за $a = 1$ дати интеграл не постоји „у класичном смислу”, али постоји као несвојствен интеграл и једнак је $\int_0^\pi \frac{1}{2} dx = \frac{\pi}{2}$. Слично, за $a = -1$ интеграл има вредност $-\frac{\pi}{2}$. За $a = 0$ важи $I(0) = \int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0$.

Како је $a^2 + 2a \cos x + 1 = (|a| - 1)^2 + 2|a|(1 + \operatorname{sgn} a \cos x) \geq 0$, за $|a| \neq 1$ је дати именилац разломка који се налази под интегралом строго већи од нуле. Следи, подинтегрална функција је непрекидна (на компакту), па дати интеграл постоји. За $a \notin \{-1, 0, 1\}$ следи

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\pi \frac{(a + \cos x) dx}{a^2 + 2a \cos x + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{a + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + a^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^\infty \frac{(a+1) + (a-1)t^2}{(a+1)^2 + (a-1)^2 t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{ако је} \\ \alpha = \frac{a+1}{a-1} \end{array} \right\} = \frac{2}{a-1} \int_0^\infty \frac{t^2 + \alpha}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} dt. \end{aligned}$$

Подинтегрална функција у последњем интегралу је рационална, па по теорему о растављању рационалне функције важи (за $a \notin \{-1, 0, 1\}$ је $\alpha \neq 0$) $\frac{t^2 + \alpha}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+\alpha^2}$. Из парности функције са леве стране последње једнакости следи $A = C = 0$, а даљим решавањем и $B = \frac{1}{\alpha+1}$, $D = \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Следи

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{2}{a-1} \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{\alpha}{t^2+\alpha^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{2a} \cdot \left[\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} \right]_0^\infty = \frac{2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{2a} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \operatorname{sgn} \alpha) \\ &= \frac{\pi}{2a} \cdot \left(1 + \operatorname{sgn} \frac{a+1}{a-1} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{a}, & \text{за } |a| > 1 \\ 0, & \text{за } |a| < 1, a \neq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

18. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Израчунати $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)^2}$.

Решење. Ако је $a = 0$, око 0+ подинтегрална функција је позитивна и важи $\frac{dx}{(2\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)^2} \sim \frac{1}{4x^2}$, па како $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ дивергира, дивергира и дати интеграл.

За $a \neq 0$ подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Због π -периодичности следи

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)^2} &= 2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)^2} \\
 &= 4 \cdot \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} \\
 &= 4 \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{(2 \operatorname{tg}^2 x + a^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{(2t^2+a^2)^2} dt \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{2-a^2}{(2t^2+a^2)^2} + \frac{1}{2t^2+a^2} \right) dt = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2a^2} \cdot \left[\frac{t}{2t^2+a^2} \right] \right|_0^{\infty} \\
 &\quad + \left(1 + \frac{2-a^2}{2a^2} \right) \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t^2+a^2} \right\} = \frac{2+a^2}{2a^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\right)^2} \\
 &= \frac{2+a^2}{2a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{|a|} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{|a|}{\sqrt{2}}} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{(2+a^2) \cdot \pi \cdot \sqrt{2}}{4|a|^3}.
 \end{aligned}$$

19. Нека је $a \in (0, 1)$. Израчунати $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 - a \sin^2 x} dx$.

Решење. За дату вредност параметра подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Због симетричности интервала интеграције и подинтегралне функције у односу на $x = \frac{\pi}{2}$ и како је $0 < 1 - a \neq 1$, следи

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 - a \sin^2 x} dx &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - a \sin^2 x} dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x} - a} dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{ctg} x \\ dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}, \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = 2 \cdot \int_{\infty}^0 \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2+(1-a))} (-dt) \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1)(t^2+(1-a))} = 2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1/a}{t^2+1} + \frac{1-1/a}{t^2+(1-a)} \right) dt \\
 &= 2 \cdot \left[\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} t + \left(1 - \frac{1}{a} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{1-a}} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \cdot (1 - \sqrt{1-a}).
 \end{aligned}$$

20. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Израчунати $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a^2 x^2)}$.

Решење. Функција $\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a^2 x^2)}$ је непрекидна на $[0, 1)$ и важи $\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a^2 x^2)} \sim \frac{C}{\sqrt{1-x}}$ кад $x \rightarrow 1$, где је $C > 0$ константа, па дати

интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл). Следи

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a^2x^2)} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{|\cos t| \cdot (1+a^2 \cos^2 t)} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{како је } \cos t \geq 0 \\ \text{за } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2 \cos^2 t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \operatorname{tg} t \\ dz = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} \\ &= \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + (a^2 + 1)} = \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Друго решење.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+a^2x^2)} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \\ dx = -\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} dt \end{array} \right\} = \int_\infty^0 \frac{-\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} dt}{\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \cdot (1 + \frac{a^2}{\operatorname{ch}^2 t})} \\ &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^2 t + a^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \operatorname{sh} t \\ dz = \operatorname{ch} t dt \end{array} \right\} = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + (a^2 + 1)} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + 1}} \right) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + 1}}. \end{aligned}$$

21. Израчунати $\int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{3}{2}} dx$.

Решење. Како је функција $\frac{1-x}{1+x}$ непрекидна и ненегативна на $[0, 1]$, следи да је функција $\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{3}{2}}$ дефинисана и непрекидна на $[0, 1]$, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{3}{2}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right\} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right)^{\frac{3}{2}} (-\sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 \frac{t}{2} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = \frac{t}{2} \\ dt = 2 du \end{array} \right\} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 u}{\cos^2 u} du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \cos^2 u)^2}{\cos^2 u} du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\cos^2 u} - 2 + \cos^2 u \right] du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\cos^2 u} - 2 + \frac{1 + \cos 2u}{2} \right] du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\cos^2 u} - \frac{3}{2} + \frac{\cos 2u}{2} \right] du \\ &= 4 \cdot \left[\operatorname{tg} u - \frac{3u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 5 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

22. Израчунати $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1+x} \cdot (3+x^2)}$.

Решење. Функција $\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} \cdot (3+x^2)}$ је непрекидна на $[0, 1]$, па тражени интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} dx}{\sqrt{1+x} \cdot (3+x^2)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \cos t \\ dx = -\sin t dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}} \cdot \frac{-\sin t dt}{3+\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \cdot \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{3+\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos t}{3+\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{3+\cos^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{3+\cos^2 t}, \end{aligned}$$

па ако се у првом интегралу уведе смена $u = \operatorname{tg} t$, а у другом $u = \sin t$, следи:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{dt}{3t^2+4} - \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} \\ &= \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{4} \cdot \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| \right]_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{\ln 3}{4}. \end{aligned}$$

23. Израчунати $\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Важи $\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right), \quad dv = dx \\ du = -\frac{dx}{x(x+1)}, \quad v = x \end{array} \right\} = \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = 2 \ln \frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(x+1)]_1^2 = 3 \ln 3 - 4 \ln 2$.

24. Израчунати $\int_0^\pi \frac{x dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Решење. Подинтегрална функција није дефинисана за $x = \frac{\pi}{2}$, али се у тој тачки може додефинисати по непрекидности (са 0), тако да дати интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл) и важи

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x} &= \int_0^\pi x \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{x(1 + \cos 2x)}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi x \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos 2x dx \\ du = dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot [x \sin 2x]_0^\pi - \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

25. Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^4 x}$.

Решење. Функција $\frac{x}{\cos^4 x}$ је непрекидна на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, па је и интеграбилна на овом интервалу. На њему важи $\cos x \neq 0$, добро је дефинисана

функција $\operatorname{tg} x$ и $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Следи

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^4 x} &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, dv = \frac{dx}{\cos^4 x}, du = dx, v = \int \frac{1}{\cos^4 x} dx = \\ \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \end{array} \right\} \\ &= \left[x \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \right) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{t^2+1} \end{array} \right\} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^3 + 3t}{t^2 + 1} dt \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \left(t + \frac{2t}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{t^2}{2} + \ln(t^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

26. Израчунати $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2} dx$ за $\alpha > 0$.

Решење. За $\alpha > 0$ подинтегрална функција је непрекидна на $[0, 1]$, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(x+\alpha)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2), dv = \frac{dx}{(x+\alpha)^2} \\ du = \frac{2x}{1+x^2} dx, v = -\frac{1}{x+\alpha} \end{array} \right\} \\ &= \left[-\frac{1}{x+\alpha} \cdot \ln(1+x^2) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{(x+\alpha)(x^2+1)} dx. \end{aligned}$$

Подинтегрална функција у последњем интегралу је рационална, па по теорему о растављању рационалне функције важи $\frac{2x}{(x+\alpha)(x^2+1)} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ за неке $A, B, C \in \mathbb{R}$. Следи $A = -B = -\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, $C = \frac{2}{1+\alpha^2}$, па је

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\ln 2}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha^2} \cdot \int_0^1 \left[-\frac{\alpha}{x+\alpha} + \frac{\alpha x+1}{x^2+1} \right] dx \\ &= -\frac{\ln 2}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha^2} \cdot \left[-\alpha \cdot \ln|x+\alpha| + \frac{\alpha}{2} \cdot \ln|x^2+1| + \arctg x \right]_0^1 \\ &= -\frac{\ln 2}{1+\alpha} + \frac{2}{1+\alpha^2} \cdot \left(\alpha \cdot \ln \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{2} \cdot \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

27. Израчунати $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^3} dx$.

Решење. Функција $\frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^3}$ је непрекидна на $[0, 1]$, па тражени интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2) dx}{(1+x)^3} &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2), dv = \frac{dx}{(1+x)^3} \\ du = \frac{2xdx}{1+x^2}, v = -\frac{1}{2(1+x)^2} \end{array} \right\} \\
&= \left[-\frac{1}{2(1+x)^2} \cdot \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2(1+x)^2} \right) \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= -\frac{1}{8} \cdot \ln 2 + \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x)^2} dx.
\end{aligned}$$

Подинтегрална функција у последњем интегралу је рационална, па по теорему о растављању рационалне функције важи $\frac{x}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$ за неке $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Лако се добија да важи $A = C = 0, B = -\frac{1}{2}, D = \frac{1}{2}$, па следи

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{8} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{8} \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{8} \cdot \ln 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

28. Израчунати $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[-1, \sqrt{3}]$, па дати интеграл постоји. Како је она и непарна (на $[-1, 1]$), следи $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = 0$, па је

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \cdot \operatorname{arctg} x dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} (x^2 - 1) \cdot \operatorname{arctg} x dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx.
\end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' dx = \left[\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{7\pi^2}{288} \text{ и}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{3}} (x^2 - 1) \cdot \operatorname{arctg} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = (x^2 - 1)dx \\ du = \frac{1}{x^2+1}, \quad v = \frac{x^3}{3} - x \end{array} \right\} \\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) \cdot \operatorname{arctg} x \right]_1^{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 1} dx \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - 2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln(x^2 + 1) \right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \cdot (1 - 2 \cdot \ln 2), \text{ следи да је } I = \frac{7\pi^2}{288} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{2 \ln 2}{3}.
\end{aligned}$$

29. Израчунати $\int_0^1 (x^2 - 1) \ln(1 - x) \, dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна и ненегативна на $[0, 1)$. Притом важи и $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) \ln(1 - x) = 0$, постоји дати интеграл и важи

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^2 - 1) \ln(1 - x) \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = 1 - x \\ dt = -dx \end{array} \right\} \\
&= \int_1^0 ((1 - t)^2 - 1) \ln t (-dt) = \int_0^1 (t^2 - 2t) \ln t \, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln t, \quad dv = (t^2 - 2t) dt \\ du = \frac{dt}{t}, \quad v = \frac{t^3}{3} - t^2 \end{array} \right\} = \left[\left(\frac{t^3}{3} - t^2 \right) \cdot \ln t \right]_0^1 - \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 \frac{t^3 - 3t^2}{t} dt \\
&= -\lim_{t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{t^3}{3} - t^2 \right) \cdot \ln t \right] - \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 (t^2 - 3t) dt = \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} \right]_0^1 \\
&= \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

30. Израчунати $\int_1^\infty \frac{(2x - 1) \ln x}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна и позитивна на $[1, \infty)$. Како је $\frac{(2x-1) \ln x}{(x^2-x+1)^2} \sim \frac{2 \ln x}{x^3}$, дати интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл). Следи да је

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{(2x - 1) \ln x}{(x^2 - x + 1)^2} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = -\frac{1}{x^2-x+1} \end{array} \right\} \\
&= \left[-\frac{\ln x}{x^2 - x + 1} \right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{dx}{x(x^2 - x + 1)} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 1 - 1}{x^2 - x + 1} \right) dx \\
&= \left[\ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]_1^\infty \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9}.
\end{aligned}$$

31. Израчунати $\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна и ненегативна, па како је и $\frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} \sim \frac{\ln x}{x^3}$, дати интеграл конвергира (несвојствени Риманов интеграл). Следи

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2} \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right\} \\ &= \left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \right]_1^\infty + \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}. \end{aligned}$$

Последњи интеграл је интеграл рационалне функције. Из $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$, следи $A=1$, $B=-1$, $C=0$, па је

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) \right]_1^\infty = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^\infty = \frac{1}{4} \cdot \ln 2. \end{aligned}$$

32. Израчунати $\int_0^\infty \frac{(1+x) \ln(x^2+1)}{(x^2+2x+2)^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна и ненегативна. Како је $\frac{(1+x) \ln(x^2+1)}{(x^2+2x+2)^2} \sim \frac{2 \ln x}{x^3}$ кад $x \rightarrow \infty$, дати интеграл постоји. Следи да је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{(1+x) \ln(x^2+1)}{(x^2+2x+2)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x^2+1), \quad dv = \frac{1+x}{(x^2+2x+2)^2} dx \\ du = \frac{2x}{x^2+1}, \quad v = -\frac{1}{2(x^2+2x+2)} \end{array} \right\} \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+2x+2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}. \end{aligned}$$

Пошто је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+2x+2} = 0$, даље је (након растављања рационалне функције под последњим интегралом)

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{5} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{-x-2}{1+x^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \frac{3}{(x+1)^2+1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{\ln(x^2+1)}{2} - 2 \arctg x + \frac{\ln((x+1)^2+1)}{2} + 3 \arctg(x+1) \right]_0^\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \cdot \ln \frac{x^2+1}{(x+1)^2+1} + \frac{\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} + \frac{\ln 2}{10} + \frac{3\pi}{20} = \frac{\pi + 2 \ln 2}{20}. \end{aligned}$$

33. Израчунати $\int_0^3 \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$.

Решење. Важи $0 \leq 2\sqrt{x} \leq 1+x$ за $x \geq 0$, па је функција добро дефинисана и непрекидна. Следи да дати интеграл постоји, па је

$$I = \int_0^3 \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} t \arcsin \frac{2t}{1+t^2} dt.$$

Формула парцијалне интеграције (тј. $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$) важи и кад је $v \in \mathcal{D}[a, b]$, $v \in \mathcal{D}[a, b] \cap C[a, b]$ и постоји $\lim_{x \rightarrow b-} v'(x)$ (добива се пуштањем граничне вредности $c \rightarrow b-$ у формули за парцијалну интеграцију на $[a, c]$, $a < c < b$). Како на $[0, 1) \cup (1, \sqrt{3}]$ важи

$$\begin{aligned} \left(\arcsin \frac{2t}{1+t^2} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2}} \cdot \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2) \cdot |1-t^2|} = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & \text{за } t \in [0, 1) \\ -\frac{2}{1+t^2}, & \text{за } t \in (1, \sqrt{3}] \end{cases}, \text{ следи} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} t \arcsin \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= 2 \cdot \int_0^1 t \arcsin \frac{2t}{1+t^2} dt + 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} t \arcsin \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{парцијална интеграција} \\ u = \arcsin \frac{2t}{1+t^2}, \quad dv = t dt, \quad v = \frac{t^2}{2} \end{array} \right\} = \left[t^2 \cdot \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 t^2 \cdot \frac{2}{1+t^2} dt + \left[t^2 \cdot \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} t^2 \cdot \left(-\frac{2}{1+t^2} \right) dt \\ &= \left[t^2 \cdot \arcsin \frac{2t}{1+t^2} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt + 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \pi - 2 \cdot [t - \arctg t]_0^1 + 2 \cdot [t - \arctg t]_1^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} - 4 + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

34. Израчунати $\int_0^1 \frac{\arcsin x - x}{x^3} dx$.

Решење. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{1}{6}$, подинтегрална функција се може додефинисати да буде непрекидна на $[0, 1]$, па дати интеграл постоји. Следи да је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\arcsin x - x}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x - x, \quad dv = \frac{dx}{x^3} \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right\} \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2x^2} \right) \cdot (\arcsin x - x) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{x^2} dx \end{aligned}$$

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(-\frac{1}{2x^2} \right) \cdot (\arcsin x - x) \right] = \left[\left(-\frac{1}{2x^2} \right) \cdot \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right] = 0$, сменом $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ се даље добија

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos t}{\sin^2 t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1 - \cos t}{\sin t} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

35. Израчунати $\int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = -t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \int_1^{-1} (-t)^2 \cdot \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} (-dt) \\ &= \int_{-1}^1 t^2 \cdot \frac{1}{1+e^t} dt = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt = \int_0^1 t^2 dt - I, \end{aligned}$$

јер последња два интеграла постоје, па је $I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$.

36. Нека је $a > 0$. Израчунати $I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $\left[\frac{1}{a}, a \right]$ за свако $a > 0$, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\} = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{|-\ln t|}{1+\frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2} \right) \\ &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t(1+t)} dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \left(\frac{|\ln t|}{t} - \frac{|\ln t|}{1+t} \right) dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} dt - I(a), \end{aligned}$$

па је $I(a) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = \ln t \\ du = \frac{dt}{t} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\ln a}^{\ln a} |u| du$. Како је у последњем интегралу подинтегрална функција парна, следи:

$$I(a) = \int_0^{\ln a} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\ln a} = \frac{(\ln a)^2}{2}.$$

37. Израчунати: (а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$; (б) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Решење. (а) Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји и важи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \frac{\pi}{4} - x \\ dt = -dx \end{array} \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt = \frac{\pi \cdot \ln 2}{4} - I, \end{aligned}$$

одакле је $I = \frac{\pi \cdot \ln 2}{8}$ (коришћено је да за $\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ важи $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$).

(б) Функција $\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ је непрекидна на $[0, 1]$, па дати интеграл постоји.

$$\text{Следи } J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^2 t} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} t) dt = I,$$

па на основу дела (а) следи $J = \frac{\pi}{8} \cdot \ln 2$.

38. Израчунати $\int_0^{3\pi} \frac{x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\pi} \frac{x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = 3\pi - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{3\pi}^0 \frac{(3\pi - t)(-dt)}{\sin^4(3\pi - t) + \cos^4(3\pi - t)} = 3\pi \cdot \int_0^{3\pi} \frac{dt}{\sin^4 t + \cos^4 t} - I, \end{aligned}$$

па је $I = \frac{3\pi}{2} \cdot \int_0^{3\pi} \frac{dt}{\sin^4 t + \cos^4 t}$. Даље је, како је функција $\frac{1}{\sin^4 t + \cos^4 t}$ $\frac{\pi}{2}$ -периодична и парна, важи

$$I = \frac{3\pi}{2} \cdot 6 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin^4 t + \cos^4 t} = 9\pi \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin^4 t + \cos^4 t},$$

па, како је $\sin^4 t + \cos^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2t = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 2t}{\operatorname{tg}^2 2t + 1}$, увођењем смене $u = \operatorname{tg} 2t$ у претходни интеграл ($dt = \frac{1}{2(1+u^2)}$) добија се

$$I = 18\pi \cdot \int_0^\infty \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{u^2 + 1}} \cdot \frac{du}{2(u^2 + 1)} = 18\pi \cdot \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 2}$$

$$= 18\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} \right] \Big|_0^\infty = \frac{9\pi^2 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

39. Израчунати $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи да је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \pi - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} = \int_\pi^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^4(\pi - t)} (-dt) \\ &= \int_0^\pi \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + (-\cos t)^4} dt = \pi \cdot \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^4 t} dt - I, \text{ па је} \\ I &= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^4 t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{array} \right\} \\ &= -\frac{\pi}{2} \cdot \int_1^{-1} \frac{du}{1 + u^4} = \left\{ \begin{array}{l} \text{због} \\ \text{парности} \end{array} \right\} = \pi \cdot \int_0^1 \frac{du}{1 + u^4}. \end{aligned}$$

Растављањем рационалне функције под последњим интегралом, добија се $\frac{1}{1+u^4} = \frac{Au+B}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{Cu+D}{u^2-\sqrt{2}u+1}$, одакле је $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = D = \frac{1}{2}$, па је

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \int_0^1 \left(\frac{2u + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{-2u + \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \right) du \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\ln \left| \frac{u^2 + \sqrt{2}u + 1}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \right| + 2 \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{u + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \operatorname{arctg} \frac{u - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + 2 \cdot \left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) - \operatorname{arctg}(-1) \right) \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{јер је } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \text{ за } x > 0 \\ u \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot (2 \cdot \ln(\sqrt{2}+1) + \pi). \end{aligned}$$

40. Израчунати $\int_0^2 (2x - 3x^2) \arcsin(1 - x) dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Даље је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (2x - 3x^2) \arcsin(1 - x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin(1 - x), \quad du = -\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \\ dv = (2x - 3x^2) dx, \quad v = x^2 - x^3 \end{array} \right\} \\ &= \left[(x^2 - x^3) \arcsin(1 - x) \right] \Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{x^2 - x^3}{\sqrt{2x - x^2}} dx \\ &= 2\pi + \int_0^2 \frac{x^2 - x^3}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = x - 1 \\ dx = dt \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$= 2\pi + \int_{-1}^1 \frac{-t - 2t^2 - t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2\pi - \int_{-1}^1 \frac{t + t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int_{-1}^1 \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Како је интеграл непарне функције по симетричном интервалу једнак нули, следи

$$\begin{aligned} I &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \sin z \\ dt = \cos z dz \end{array} \right\} = 2\pi - 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 z}{|\cos z|} \cdot \cos z dz \\ &= 2\pi - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2z) dz = 2\pi - 2 \cdot \left[z - \frac{1}{2} \cdot \sin 2z \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

41. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Израчунати $\int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{2a^2 + ax - x^2}}$.

Решење. Нека је $I(a) = \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{2a^2 + ax - x^2}}$. Како на интервалу $[0, a]$ важи $2a^2 + ax - x^2 = \frac{9a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 2a^2$, за $a \neq 0$ подинтегрална функција је дефинисана и непрекидна, па дати интеграл постоји (за $a = 0$ то је интеграл облика $\int_0^0$, па се може формално узети да је $I(0) = 0$). За $a \neq 0$ следи

$$I(a) = \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot a^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = x - \frac{a}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{t + \frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot a^2 - t^2}} dt.$$

Како је интеграл непарне (интеграбилне) функције по симетричном интервалу једнак нули и функција $\frac{t}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot a^2 - t^2}}$ и интервал $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ испуњавају те услове, следи

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{t}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot a^2 - t^2}} dt + \frac{a}{2} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{4} \cdot a^2 - t^2}} \\ &= \frac{a}{3|a|} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{3a}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = \frac{2t}{3a} \\ dt = \frac{3a}{2} du \end{array} \right\} \\ &= \frac{a}{3|a|} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{|a|} \cdot \left[\arcsin u \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = |a| \cdot \arcsin \left(\frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

42. Израчунати $\int_0^1 \frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл

постоји. Следи

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \tg t \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tg t \cdot e^t \cdot \cos^2 t \, dt \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cdot e^t \, dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin 2t, \, dv = e^t dt \\ du = 2 \cos 2t, \, v = e^t \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot [\sin 2t \cdot e^t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \cdot e^t \, dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos 2t, \, dv = e^t dt \\ du = -2 \sin 2t, \, v = e^t \end{array} \right\} \\
 &= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2} - ([e^t \cdot \cos 2t]_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cdot e^t \, dt) \\
 &= \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2} + 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \cdot e^t \, dt \right),
 \end{aligned}$$

па је $I = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{2} + 1 \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 2}{10}$.

43. Израчунати $\int_0^2 \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{(x+1)(3-x)} dx$.

Решење. Како је подинтегрална функција непрекидна на $[0, 2]$, дати интеграл постоји. Следи $I = \int_0^2 \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{(x+1)(3-x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int_{-1}^1 \frac{(t+1)\sqrt{1-t^2}}{4-t^2} dt$. Аналогно претходном, постоје и $\int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{1-t^2}}{4-t^2} dt$ и $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{4-t^2} dt$. Како је подинтегрална функција у првом интегралу непарна, а у другом парна (на симетричном скупу), следи

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \cdot \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{4-t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \sin u \\ dt = \cos u \, du \end{array} \right\} \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\cos u|}{4 - \sin^2 u} \cdot \cos u \, du = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{3 + \cos^2 u} du \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{3}{3 + \cos^2 u} \right) du = \pi - 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 + \cos^2 u} du \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \tg u \\ dt = \frac{1}{\cos^2 u} du \end{array} \right\} = \pi - 6 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{3z^2 + 4} dz \\
 &= \pi - 6 \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \arctg\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right) \right]_0^\infty = \pi - \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

44. Израчунати $\int_0^\pi x \ln \sin x \, dx$.

Решење. Функција $\ln \sin x$ је непрекидна и негативна на $(0, \pi)$ и важи $\ln \sin x \sim \ln x$ кад $x \rightarrow 0+$ и $\ln \sin x \sim \ln(\pi - x)$ кад $x \rightarrow \pi-$. Како

постоји $\int_0^1 \ln x dx$ (као несвојствен Риманов интеграл функције константног знака), следи да постоји и $I = \int_0^\pi \ln \sin x dx$, а тим пре и $J = \int_0^\pi x \ln \sin x dx$. Такође, конвергирају и $\int_0^\pi \ln \sin \frac{x}{2} dx$ и $\int_0^\pi \ln \cos \frac{x}{2} dx$. Следи

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi x \ln \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \pi - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} \\ &= \int_\pi^0 (\pi - t) \ln \sin(\pi - t) (-dt) = \int_0^\pi (\pi - t) \ln \sin t dt = \pi I - J, \end{aligned}$$

па важи $J = \frac{\pi}{2} \cdot I$. Како је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \ln \sin x dx = \int_0^\pi \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int_0^\pi \ln 2 dx + \int_0^\pi \ln \sin \frac{x}{2} dx + \int_0^\pi \ln \cos \frac{x}{2} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \frac{x}{2} \\ dx = 2 dt \end{array} \right\} = \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = \frac{\pi}{2} + t \\ du = dt \end{array} \right\} = \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln \sin u du \\ &= \pi \ln 2 + 2I, \text{ следи } I = -\pi \ln 2. \text{ Дакле, важи } J = -\frac{\pi^2 \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

45. Израчунати $\int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоји. Следи

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{2x+x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x+1 = \operatorname{ch} t \\ dx = \operatorname{sh} t \end{array} \right\} = \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \operatorname{sh}^2 t dt \\ &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2}{8} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2}. \end{aligned}$$

46. Нека је $I = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \ln x dx$.

(а) Доказати да I конвергира.

(б) Израчунати I .

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна и константног знака (негативна, $x + \sqrt{1+x^2} > 1$) на $(0, 1]$. Како је $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \ln x \sim \ln x$ кад $x \rightarrow 0+$ и како $\int_0^1 \ln x dx$ конвергира, следи да конвергира и дати интеграл. Следи

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad dv = \ln x dx \\ du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = x(\ln x - 1) \end{array} \right\} \\
 &= \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot x(\ln x - 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (\ln x - 1) dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x - 1, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \sqrt{1+x^2} - 1 \end{array} \right\} = -\ln(1 + \sqrt{2}) - \left[(\sqrt{1+x^2} - 1) \right. \\
 &\quad \cdot (\ln x - 1) \left. \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos t} - 1}{\operatorname{tg} t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos t}{\sin^2 t \cos^2 t} \cdot \sin t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \end{array} \right\} \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1 - z}{z^2(1 - z^2)} \cdot (-dz) \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} \right) dz \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 + \left[-\ln z - \frac{1}{z} + \ln(1+z) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\
 &= -\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 - 1 + \ln 2 + \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= -2\ln(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - 2 + \ln 2.
 \end{aligned}$$

Напомена. Коришћено је да је $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} - 1) \ln x = 0$ и растављање рационалне функције на збир елементарних разломака. Уобичајно је да се овај задатак решава и коришћењем смене $x = \operatorname{sh} t$.

47. (а) Доказати да $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$ конвергирају.

(б) Доказати да важи $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Решење. (а) Функција $\sqrt{\operatorname{ctg} x}$ је непрекидна на $(0, \frac{\pi}{2}]$. Како је $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} \sim \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ кад $x \rightarrow 0+$, следи да $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx$ постоји (несвојствен Риманов интеграл).

Функција $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$ је непрекидна на $(0, \frac{\pi}{2})$. Како је $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} \sim \sqrt{x}$ кад $x \rightarrow 0+$ и $\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$ кад $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-$,

слиеди да $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$ постоји (несвојствен Риманов интеграл).

(б) Нека је $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx$. Онда је

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \frac{\pi}{2} - t \\ dx = -dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} t}} dt, \end{aligned}$$

па су тражени интеграли једнаки. Следи

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x + 1}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \sqrt{\operatorname{tg} x} \\ dx = \frac{2t}{1+t^4} dt \end{array} \right\} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{2t}{1+t^4} dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = t - \frac{1}{t}, \text{ функција } t - \frac{1}{t} \text{ је монотона и диференцијаб-} \\ \text{билна } dz = (1 + \frac{1}{t^2})dt, \text{ на важи } \frac{1+t^4}{1+t^2} dt = \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}} dt = \frac{d(t-\frac{1}{t})}{(t-\frac{1}{t})^2+2} \end{array} \right\} \\ &= 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2+2} = 2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

па је $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, што је тврђење задатка.

48. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx$.

Решење. За свако $n \in \mathbb{N}$ подинтегрална функција је непрекидна. Ако је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x dx$, следи $I_{n+1} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int_0^1 t^{2n+1} dt = \frac{1}{2n+2}$. Како је $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = \left[\ln t \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2$, следи $I_n = (-1)^n \cdot \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2k}$.

49. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Израчунати $\int_1^{\infty} \frac{\ln^n x}{x^2} dx$.

Решење. За свако $n \in \mathbb{N}_0$ интеграл постоји (несвојствен Риманов интеграл). Нека је $I_n = \int_1^\infty \frac{\ln^n x}{x^2} dx$ за $n \in \mathbb{N}_0$. За $n \in \mathbb{N}$ следи

$$I_n = \int_1^\infty \frac{\ln^n x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^n x, \quad dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = n \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}, \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = \left[-\frac{\ln^n x}{x} \right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{n \ln^{n-1} x}{x^2} dx = n I_{n-1}.$$

Како је $I_0 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = 1$, следи $I_n = n!$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

50. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Израчунати $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $(0, 1)$ и важи $\frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}} \sim x^{n-\frac{1}{2}}$ кад $x \rightarrow 0+$ и $\frac{x^n}{\sqrt{x(1-x)}} \sim (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ кад $x \rightarrow 1-$, па дати интеграл постоји (несвојствен Риманов). Следи

$$I_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \sin^2 t \\ dx = 2 \sin t \cos t dt \end{array} \right\} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt = 2 \cdot J_{2n},$$

где је $J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t dt$ за $k \in \mathbb{N}_0$. Како за $k \geq 2$ важи

$$J_k = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin^{k-1} t, \quad dv = \sin t dt \\ du = (k-1) \sin^{k-2} t \cos t, \quad v = -\cos t \end{array} \right\} = \left[\sin^{k-1} t \cdot (-\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (k-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} t \cos^2 t dt = (k-1)(J_{k-2} - J_k),$$

па је $J_k = \frac{k-1}{k} \cdot J_{k-2}$. Како је $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$, следи

$$I_n = 2 \cdot J_{2n} = 2 \cdot \frac{(2n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(2n) \cdot \dots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \cdot \pi.$$

8. ИНТЕГРАЛИ

1. Израчунати површину коначне области ограничене кривом

$$(y - 2x^2)^2 + x^2 = 2.$$

Решење. Скуп $\{(x, y) \mid (y - 2x^2)^2 + x^2 \geq 2\}$ је неограничен, па је скуп чија се површина тражи $S = \{(x, y) \mid (y - 2x^2)^2 + x^2 \leq 2\}$. Како је квадрат реалног броја ненегативан, следи $x^2 \leq 2, (y - 2x^2)^2 \leq 2$. Из прве неједнакости следи да је x -координата тачака скупа S ограничена, а из друге неједнакости тада следи и ограниченост y -координате, па је површина области S коначна. Следи

$$S = \{(x, y) \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, -\sqrt{2 - x^2} + 2x^2 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} + 2x^2\}, \text{ тј.}$$

$$\begin{aligned} P(S) &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left((\sqrt{2 - x^2} + 2x^2) - (-\sqrt{2 - x^2} + 2x^2) \right) dx \\ &= 2 \cdot \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \sqrt{2} \sin t \\ dx = \sqrt{2} \cos t dt \end{array} \right\} \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} \cdot (\sqrt{2} \cos t dt) = 4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t dt. \end{aligned}$$

Како је функција $\cos x$ ненегативна на интервалу $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, следи

$$P(S) = 4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2 \cdot \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

2. Израчунати површину дела коначне површине ограниченог кривим $y = e^{x^2} + \cos x$ и $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} + e^{x^2}$ у xOy равни.

Решење. Пресечне тачке кривих су $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ и $(\frac{\pi}{2}, 0)$ и међу областима на које је раван подељена овим кривим постоји тачно једна ограничена површина: $\{(x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, x^2 - \frac{\pi^2}{4} + e^{x^2} \leq y \leq e^{x^2} + \cos x\}$. Њена

$$\begin{aligned} \text{површина је } &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((e^{x^2} + \cos x) - \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} + e^{x^2} \right) \right) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{\pi^2}{4} - \right. \\ &\left. x^2 \right) dx = \left[\sin x + \frac{\pi^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

3. Израчунати дужину лука криве $y(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^x \sqrt{\frac{1}{t^6} + \frac{1}{t^4} - 1} dt$, где је $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1$.

Решење. Крива је добро дефинисана за $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1$, глатка и важи $y'(x) = \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4} - 1}$, па је $1 + (y'(x))^2 = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4}$ за $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1$, а тражена дужина лука $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{\frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^4}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\operatorname{tg}^3 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin^3 t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t dt}{(1 - \cos^2 t)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \end{array} \right\} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left[-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right] dz = \frac{1}{4} \cdot \left[\ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right] \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \left[4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2 \ln \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \right].$

4. Одредити дужину петље криве, параметарски задате са $x(t) = t^2$, $y(t) = t - \frac{t^3}{3}$.

Решење. Ако уочена крива има петљу, за неке $t_1 \neq t_2$ важи $x(t_1) = x(t_2)$ и $y(t_1) = y(t_2)$, па следи $t_2 = -t_1 \neq 0$ и $t_1(1 - \frac{t_1^2}{3}) = 0$, односно $\{t_1, t_2\} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, петља почиње и завршава се у тачки $(3, 0)$ и петљу тачка обилази када је параметар из $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Следи да је тражена дужина

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (1-t^2)^2} dt \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(1+t^2)^2} dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (1+t^2) dt = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} (1+t^2) dt \\ &= 2 \cdot \left[t + \frac{t^3}{3} \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5. Нека је O обим елипсе чије су полуосе a и b , $a \neq b$. Доказати да важи

$$(a+b)\pi < O < \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \pi\sqrt{2}.$$

Решење. Како је параметризација елипсе $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $-\pi \leq t \leq \pi$, следи

$$\begin{aligned} O &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}) dt$$

(последње се добија сменом $u = \frac{\pi}{2} + t$ на интервалу $[\frac{\pi}{2}, \pi]$).

На основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \leq 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot [(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t) + (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)] \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$, одакле се добија друга неједнакост (како је $a \neq b$, неједнакост је строга).

Слично, прва следи из $(a+b) < \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$, која је еквивалентна са

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &< a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)}, \\ \text{тј. са } 0 &< -a^2 b^2 + (a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \\ &= \sin^2 t \cos^2 t (a^4 + b^4 - 2a^2 b^2) \\ &\quad + a^2 b^2 (-1 + 2 \sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t + \cos^4 t) \\ &= \sin^2 t \cos^2 t (a^2 - b^2)^2 + a^2 b^2 (-1 + (\sin^2 t + \cos^2 t)^2) \\ &= \sin^2 t \cos^2 t (a^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

6. Фигура ограничена линијама $x = 0$, $x = 1$, $y = xe^x$ и $y = 0$ ротира око x -осе. Израчунати запремину тако добијеног тела.

Решење. Запремина уоченог обртног тела је $V = \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{2x^2 - 2x + 1}{2} \cdot e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \cdot (e^2 - 1)$.

7. Поређати у строго растући низ бројеве $\frac{\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{16}$, π и $\int_0^\pi e^{-\sin^2 x} dx$.

Решење. Како је $1 - x < e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$ за $x > 0$ следи $\int_0^\pi e^{-\sin^2 x} dx > \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$ и $\int_0^\pi e^{-\sin^2 x} dx < \int_0^\pi \left(1 - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} \right) dx = \int_0^\pi \left(\cos^2 x + \frac{1}{8} \cdot (2 \sin^2 x) \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{(1 - \cos 2x)^2}{8} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{8} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos 2x + \frac{1}{16} \cdot (1 + \cos 4x) \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{11}{16} + \frac{1}{4} \cdot \cos 2x + \frac{1}{16} \cdot \cos 4x \right) dx = \left[\frac{11x}{16} + \frac{1}{8} \cdot \sin 2x + \frac{1}{64} \cdot \sin 4x \right]_0^\pi = \frac{11\pi}{16}$.

Следи $\frac{\pi}{2} < \int_0^\pi e^{-\sin^2 x} dx < \frac{11\pi}{16} < \pi$.

8. Одредити на $\mathbb{R}$ примитивну функцију функције $f(x) = \max\{1, x^2\}$.

Решење. Функција је непрекидна на (повезаном) скупу $\mathbb{R}$, па има фамилију примитивних, које се разликују за константну функцију на $\mathbb{R}$. Одредимо ону примитивну функцију $F(x)$ за коју је $F(-1) = 0$. Како је $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1, & \text{за } x \in [-1, 1] \end{cases}$, следи

$$(a) \text{ ако је } x \in (-\infty, -1), \text{ онда је } F(x) = - \int_x^{-1} t^2 dt = - \left[\frac{t^3}{3} \right]_x^{-1} = \frac{x^3 + 1}{3};$$

$$(b) \text{ ако је } x \in [-1, 1], \text{ онда је } F(x) = \int_{-1}^x dt = x + 1;$$

$$(v) \text{ ако је } x \in (1, \infty), F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^1 dt + \int_1^x t^2 dt = 2 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^x = 2 + \frac{x^3 - 1}{3} = \frac{x^3 + 5}{3}.$$

Дакле, све примитивне функције функције f су

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{3} + c, & \text{за } x \in (-\infty, -1) \\ x + 1 + c, & \text{за } x \in [-1, 1] \\ \frac{x^3+5}{3} + c, & \text{за } x \in (1, \infty) \end{cases},$$

где је $c \in \mathbb{R}$.

9. Испитати конвергенцију $\int_0^\infty \cos x^3 dx$.

Решење. Како је $\int_0^\infty \cos x^3 dx = \int_0^1 \cos x^3 dx + \int_1^\infty \cos x^3 dx$, пошто $\int_0^1 \cos x^3 dx$ постоји (интеграл непрекидне функције на компактном интервалу), довољно је испитати да ли $\int_1^\infty \cos x^3 dx$ конвергира. Функција $t^{\frac{1}{3}}$ је непрекидно-диференцијабилна на $[1, \infty)$, следи $\int_1^\infty \cos x^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = t^{\frac{1}{3}} \\ dx = \frac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt \end{array} \right\} = \int_1^\infty t^{-\frac{2}{3}} \cos t dt$, па дати интеграл конвергира ако и само ако последњи интеграл конвергира, а он конвергира по Дирихлеовом критеријуму, јер је функција $t^{-\frac{2}{3}}$ глатка на $[1, \infty)$ и монотонно тежи нули кад $t \rightarrow \infty$ (тј. ограничене је варијације и тежи ка 0 кад $t \rightarrow \infty$), а функција $\cos t$ је непрекидна и има ограничену примитивну функцију.

10. Нека је $a \in \mathbb{R}$. Израчунати $\int_0^1 \frac{e^x(x-1)+a}{x^2} dx$.

Решење. Важи $e^x(x-1)+a = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(x-1)+a = a-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ кад $x \rightarrow 0$, па је $\frac{e^x(x-1)+a}{x^2} = \frac{a-1}{x^2} + \frac{1}{2} + o(1)$ кад $x \rightarrow 0$, па је

функција интеграбилна ако и само ако је $a = 1$. Ако је $a = 1$, како је $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ за $x > 0$, следи $\int_0^1 \frac{e^x(x-1)+a}{x^2} dx = \left[\frac{e^x - 1}{x}\right]_0^1 = e - 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e - 2$.

11. Испитати конвергенцију $\int_0^\infty \frac{\cos^\alpha x}{\sqrt{x}} dx$ за

(а) $\alpha = 1$; (б) $\alpha = 2$.

Решење. (а) Функција $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ је непрекидна на $(0, \infty)$. На $(0, 1)$ је позитивна и важи $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ кад $x \rightarrow 0+$, па постоји $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. Како је $\frac{1}{\sqrt{x}}$ глатка на $[1, \infty)$, монотонно тежи нули кад $x \rightarrow \infty$ и за свако $M > 1$ важи $\left|\int_1^M \cos x dx\right| = \left|[\sin x]_1^M\right| = |\sin M - \sin 1| \leq 2$ (тј. функција $\cos x$ има ограничену примитивну функцију), по Дирихлеовом критеријуму следи да постоји $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$.

Дакле, постоји интеграл дат у (а).

(б) Важи $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x}}$. Аналогно као у (а) се показује да $\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}} dx$ конвергира. Међутим, $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ дивергира, па дивергира и интеграл дат у (б) (збир конвергентног и дивергентног интеграла).

12. Нека је $a > 0$. Испитати конвергенцију $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x - 1)}} dx$.

Решење. Ако је $a > 1$ величина под кореном је негативна за $x \in (1, a)$, па у овом случају интеграл не постоји.

Ако је $0 < a \leq 1$ подинтегрална функција је добро дефинисана и непрекидна на $(1, \infty)$. Како је $\frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x - 1)}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ кад $x \rightarrow \infty$ и

како $\int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ конвергира, следи да за свако $0 < a \leq 1$ је у бесконачности сингуларитет који не ремети интеграбилност.

За понашање око $1+$ важи:

(а) ако је $a = 1$, онда је $\frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x - 1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(x - 1)}}$ кад $x \rightarrow 1+$, па како

$\int_1^2 \frac{dx}{x - 1}$ дивергира, дивергира и дати интеграл;

(б) ако је $0 < a < 1$, онда је $\frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x - 1)}} \sim \frac{c}{\sqrt{x - 1}}$ кад $x \rightarrow 1+$, за неко

$c > 0$ ($c = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}$), па како $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$ конвергира, конвергира и

дати интеграл.

13. Испитати конвергенцију $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је добро дефинисана и непрекидна на $(0, 1)$. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\ln x}{1-x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Лопиталова правила} \\ (1-x^2)' = -2x < 0 \text{ око } 1- \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2},$$

у 1 је отклоњив сингуларитет. Како је подинтегрална функција константног знака (негативна), може се применити поредбени критеријум. Око 0+ је $\frac{\ln x}{1-x^2} \sim \ln x$, па, како постоји $\int_0^1 \ln x dx$, постоји и дати интеграл.

14. Испитати конвергенцију $\int_0^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$.

Решење. Како је $\left| \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ и $\int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x}}$ конвергира за свако $M > 0$, следи да $\int_0^M \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ конвергира за свако $M > 0$. Пошто је $\sin(x + \frac{1}{x}) = \sin x \cos \frac{1}{x} + \cos x \sin \frac{1}{x}$, функције $\sin x$ и $\cos x$ имају на $[1, \infty)$ ограничене примитивне функције, а $\frac{1}{\sqrt{x}}$ монотонно тежи ка 0 кад $x \rightarrow \infty$, на основу Дирихлеовог критеријума следи конвергенција $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ и $\int_1^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. Функције $\cos \frac{1}{x}$ и $\sin \frac{1}{x}$ су монотоне и ограничене на $[1, \infty)$ (прва тежи ка 1, а друга ка 0, кад $x \rightarrow \infty$), те, по Абеловом критеријуму, следи да постоје $\int_1^\infty \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ и $\int_1^\infty \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$. Из претходног следи и конвергенција $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$. Дакле, $\int_0^1 \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ и $\int_1^\infty \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{\sqrt{x}} dx$ конвергирају, па конвергира и полазни интеграл.

15. Испитати конвергенцију $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{arctg} x dx$.

Решење. Како је $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{arctg} x \right) = 0$, у нули је отклоњив сингуларитет. Како је $\left| \int_0^M \sin x dx \right| \leq 2$ за свако $M > 0$ и $\frac{1}{x}$ монотонно тежи ка 0 кад $x \rightarrow \infty$, на основу Дирихлеовог критеријума конвергира $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Како је функција $\arctg x$ монотона и ограничена, на основу Абеловог критеријума следи конвергенција датог интеграла.

16. Нека је $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}, & \text{за } x > 0 \wedge x \neq \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \\ 2017, & \text{за } x = \frac{1}{k\pi} \vee x = 0, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$. Испитати интеграбилност f на $[0, 1]$.

Решење. Функција је добро дефинисана. На интервалу $[0, 1]$ она је непрекидна на свим подинтервалима $(\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi})$ и $(\frac{1}{\pi}, 1]$. Следи да је скуп њених тачака прекида пребројив, па је Лебегове мере 0, одакле следи да је f Риман интеграбилна на $[0, 1]$.

17. Нека је f непрекидно-диференцијабилна на $[0, 1]$ и $f(1) - f(0) = 1$. Доказати да важи $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq 1$.

Решење. Из непрекидности $f'(x)$ следи да постоје $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx$ и $\int_0^1 f'(x) dx$. На основу неједнакости Коши–Шварц–Буњакоског, следи

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx = \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \cdot \int_0^1 dx \geq \left| \int_0^1 f'(x) dx \right| = |f(1) - f(0)| = 1.$$

Једнакост се достиже ако и само ако је $f(x) = x + c$ за $c \in \mathbb{R}$.

18. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилна функција, таква да важи $\int_0^1 f(x) dx = 0$ и $|f'(x)| \leq 3x$. Доказати да важи $|f(1)| \leq 1$.

Решење. По условима задатка, функције $f(x)$ и $xf'(x)$ су непрекидне на $[0, 1]$, па су и интеграбилне на $[0, 1]$. Следи

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = f(x), \quad dv = dx \\ du = f'(x) dx, \quad v = x \end{array} \right\} \\ &= [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x) dx. \end{aligned}$$

Из претходног, услова $|f'(x)| \leq 3x$ и неједнакости троугла за интеграл $\left(\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \right)$, следи $|f(1)| = \left| \int_0^1 xf'(x) dx \right| \leq \int_0^1 x|f'(x)| dx \leq \int_0^1 3x^2 dx = (x^3)_0^1 = 1$, што је тврђење задатка.

19. Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је диференцијабилна на интервалу (a, b) таква да је $f(a) = f(b) = 0$. Ако је $|f'(x)| \leq M$ за свако $x \in (a, b)$, доказати да је $\int_a^b f(x) dx \leq M \cdot \frac{(b-a)^2}{4}$.

Решење. Како је $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$, следи $|f(x)| \leq \int_a^x |f'(t)|dt \leq M(x-a)$ за $x \in (a, b)$. Аналогно је $\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^x M(t-a)dt = \frac{M(x-a)^2}{2}$ за $x \in (a, b)$. Специјално, важи $\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$.

Слично се добија да је $\left| \int_x^b f(t)dt \right| \leq \frac{M(b-x)^2}{2}$ за $x \in (a, b)$, тј. специјално $\left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{8}$, па је $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \right| \leq M \cdot \frac{(b-a)^2}{4}$, што је и требало доказати.

20. Ако је функција $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилна и важи $f(0) = f(1) = 0$, тада важи $\int_0^1 |f'(t)| dt \geq 2|f(x)|$, за свако $x \in [0, 1]$. Доказати.

Решење. Како је $|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t)dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt$ и, аналогно, $|f(x)| = |f(1) - f(x)| = \left| \int_x^1 f'(t)dt \right| \leq \int_x^1 |f'(t)| dt$, сабирањем следи тврђење задатка.

21. Доказати да је $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx > 0$.

Решење. Након смене $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, следи $I = \int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$. Како је

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } u = 2\pi - t \\ du = -dt \end{array} \right\} = \int_{\pi}^0 \frac{\sin(2\pi - u)}{2\sqrt{2\pi - u}} (-du),$$

следи $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2\sqrt{2\pi - t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \sin t \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi - t}} \right) dt > 0$, јер је подинтегрална функција ненегативна и строго позитивна на скупу позитивне мере.

22. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ два пута диференцијабилна функција и важи $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(а) Доказати да важи $f''(\xi) = 2$ за неко $0 < \xi < 1$.

(б) Израчунати $\int_0^1 x f''(1-x) dx$.

Решење. (а) Из Тејлорове формуле (са Лагранжовим обликом оста-

тка), следи $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi_x)}{2} \cdot x^2$ за $x \in [0, 1]$, где је $0 < \xi_x < x$.

За $x = 1$ следи $1 = f(1) = \frac{f''(\xi)}{2}$ за неко $\xi \in (0, 1)$, тј. $f''(\xi) = 2$ за неко $\xi \in (0, 1)$, што је и требало доказати.

(б) Како је $xf''(1-x) = f'(1-x) - (xf'(1-x))'$, и како су $f'(1-x)$ (непрекидна на $[0, 1]$) и $(xf'(1-x))'$ (извод диференцијабилне функције на $[0, 1]$) интеграбилне на $[0, 1]$, дати интеграл постоји (разлика две интеграбилне функције је интеграбилна). Следи $\int_0^1 xf''(1-x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, dv = f''(1-x) dx \\ du = dx, v = -f'(1-x) \end{array} \right\} = [-x \cdot f'(1-x)]_0^1 + \int_0^1 f'(1-x) dx = -f'(0) + [-f(1-x)]_0^1 = f(1) - f(0) = 1$.

23. Нека су f и g непрекидне функције на сегменту $[a, b]$ и нека је f опадајућа функција, а $0 \leq g(t) \leq 1$ за $t \in [a, b]$. Доказати да важи $\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \int_a^{a+\lambda} f(t)dt$, где је $\lambda = \int_a^b g(t)dt$.

Решење. Како је функција g непрекидна и ненегативна, функција $h(x) = a + \int_a^x g(t)dt$ је диференцијабилна и неоппадајућа на $(a, a + \lambda)$. Пошто је

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\lambda} f(t) dt &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = h(u) \\ dt = h'(u)du = g(u)du \end{array} \right\} = \int_a^b f(h(t))g(t) dt \\ &= \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b [f(h(t)) - f(t)] \cdot g(t) dt, \end{aligned}$$

тражена неједнакост је еквивалентна са ненегативношћу последњег интеграла, која следи из $g(t) \geq 0$ и $(\forall t \in [a, b]) f(h(t)) \geq f(t)$ (f је опадајућа и за свако $x \in [a, b]$ важи $h(x) = a + \int_a^x g(t) dt \leq a + \int_a^x 1 dt = x$, јер је $(\forall t \in [a, b]) g(t) \leq 1$). Једнакост важи ако и само ако је последњи интеграл једнак нули. Како су функције f , g и h непрекидне, непрекидна је и подинтегрална функција у том интегралу, па је он једнак нули ако и само ако је подинтегрална функција једнака нули (ненегативна је; ако је различита од нуле у једној тачки, непрекидна функција је таква и на скупу мере веће од нула). Како је f опадајућа, $f(h(x)) - f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x \Leftrightarrow g(t) = 1$ за $t \in [a, x]$. Следи $(\forall x \in [a, b]) g(x) \in \{0, 1\}$, па како је g непрекидна, једнакост важи ако и само ако је $g(x) = 0$ на $[a, b]$ или $g(x) = 1$ на $[a, b]$.

24. Нека је $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ и $f(x) = \int_0^x f(t)dt$, за $x \in \mathbb{R}$. Доказати да је $f(x) = 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Нека је $g(x) = e^{-x} \cdot \int_0^x f(t)dt$. Функција g је диференцијабилна, јер је f непрекидна, а 0 и x непрекидно-диференцијабилне. Следи $g'(x) = e^{-x} \cdot \left[f(x) - \int_0^x f(t)dt \right] = 0$ (по условима задатка). Како је $\mathbb{R}$ повезан скуп (у стандардној метрици), следи да је g константно, тј. $g(x) = g(0) = 0$, односно $(\forall x)f(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$ (јер је $e^x \neq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$), што је и требало доказати.

Напомена. Ако је f непрекидна, а φ и ψ непрекидно-диференцијабилне на $\mathbb{R}$, онда је $g(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$ диференцијабилна функција и важи $g'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

25. Уколико постоји, израчунати $\lim_{x \rightarrow 1+} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Решење. За $t \in (0, \infty)$ важи $\frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$, па је

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \left[\ln(t-1) \right]_x^{x^2} = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \\ &\leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{t dt}{t-1} = \left[t + \ln(t-1) \right]_x^{x^2} = x^2 - x + \ln(x+1), \end{aligned}$$

и како је $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln(x+1) = \ln 2 = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - x + \ln(x+1))$, по леми о два полицајца следи да тражена гранична вредност постоји и једнака је $\ln 2$.

26. Доказати да је $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - x$ строго растућа функција на свом домену.

Решење. Функција e^{-t^2} је непрекидна на $\mathbb{R}$, па на сваком компактном интервалу постоји њен интеграл, тј. домен функције је $\mathbb{R}$ (ако је $x < 0$, сматра се да је $\int_x^0 f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$). Како су функције 0 , x и e^{x^2} и диференцијабилне, следи диференцијабилност $f(x)$ (производ диференцијабилних и диференцијабилност интеграла), па је $f'(x) = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2} \cdot e^{-x^2} - 1 \geq 0$ (важи $\int_0^x e^{-t^2} dt > 0$ за $x > 0$ и $\int_0^x e^{-t^2} dt < 0$ за $x < 0$, пошто је функција под интегралом позитивна). Притом је за $x \neq 0$ неједнакост строга. Следи да је $f(x)$ строго растућа.

27. Доказати да важи $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ кад $x \rightarrow \infty$.

Решење. Како за $x > 1$ важи $\left(\frac{e^{x^2}}{x}\right)' = \frac{2xe^{x^2} \cdot x - e^{x^2}}{x^2} > 0$, $\int_0^x e^{t^2} dt \rightarrow \infty$ и $\frac{e^{x^2}}{x} \rightarrow \infty$ кад $x \rightarrow \infty$, по Лопиталовим правилима следи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{2xe^{x^2} \cdot x - e^{x^2}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2},$$

одакле следи тврђење задатка.

$$28. \text{ Израчунати } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x (\arctg t)^2 dt\right)^2}{x^2 + 1}.$$

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна, па за свако реално x дати интеграл постоји. По теореме о граничној вредности производа и како је функција x^2 непрекидна следи

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x (\arctg t)^2 dt\right)^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (\arctg t)^2 dt}{x}\right)^2. \end{aligned}$$

Функције $\int_0^x (\arctg t)^2 dt$ и x су диференцијабилне, $x' = 1 > 0$, по теореме о диференцирању интеграла, важи $\left(\int_0^x (\arctg t)^2 dt\right)' = (\arctg x)^2$, па како је дати израз облика $\frac{\infty}{\infty}$, испуњени су услови Лопиталових правила. Следи $L = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\arctg x)^2}{1}\right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x\right)^2 = \frac{\pi^4}{16}$.

29. Испитати ток и нацртати график функције

$$f(x) = \int_0^x \arcsin \frac{t}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} dt.$$

Решење. Домен: Како је $2t^2 + 4t + 4 = t^2 + (t+2)^2 > 0$, поткорена величина је позитивна, тј. дати корен је дефинисан и не долази до дељења нулом. Како је $\left|\frac{t}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}}\right| \leq 1 \Leftrightarrow t^2 \leq t^2 + (t+2)^2 \Leftrightarrow (t+2)^2 \geq 0$, дефинисана је и функција $\arcsin$. Дакле, подинтегрална функција је дефинисана и непрекидна, па за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји интеграл те функције по компакту $[0, x]$ за свако $x \in \mathbb{R}$, тј. $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Први извод: Испуњени су услови за диференцирање интеграла, следи $f'(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}$, па важи $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Слично $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. У тачки $(0, 0)$ достиже се локални минимум.

Нуле и знак: Подинтегрална функција је позитивна за $t > 0$ (показано при испитивању знака првог извода), па је $f(x) > 0$ на $(0, \infty)$. Слично, подинтегрална функција је негативна за $t < 0$, па је $f(x) > 0$ на $(-\infty, 0)$ („други минус“ се добија приликом „окретања“ граница). За $x = 0$ је $f(x) = 0$.

Асимптотика: Како су испуњени услови Лопиталових правила за функције $f(x)$ и x кад $x \rightarrow \infty$, следи (ако f има косу асимптоту $y = kx + n$ у ∞) $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \frac{\pi}{4}x = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \left(\arcsin \frac{t}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) dt$, што је по формули о разлици за функцију $\arcsin$ једнако

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{|t+2|}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dt \\ = \int_0^\infty \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} dt \end{aligned}$$

Како је $\arcsin t \sim t$ кад $t \rightarrow 0$ и $\frac{t}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} \sim \frac{1}{t}$ кад $t \rightarrow \infty$, следи

да $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2t^2 + 4t + 4}} \sim \frac{1}{t}$ кад $t \rightarrow \infty$, па дати интеграл не конвергира (поредбени критеријум за интеграле), тј. не постоји коса асимптота у ∞ . Важи $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Слично се показује да не постоји коса асимптота у $-\infty$. Важи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

Други извод: За $x \neq -2$ важи

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2x^2 + 4x + 4}}} \cdot \frac{\sqrt{2x^2 + 4x + 4} - t \cdot \frac{4x+4}{2\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}}{2x^2 + 4x + 4} \\ &= \frac{\sqrt{2x^2 + 4x + 4}}{|x+2|} \cdot \frac{(2x^2 + 4x + 4) - 2x(x+1)}{(2x^2 + 4x + 4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{2}{2x^2 + 4x + 4} = \begin{cases} \frac{2}{2x^2 + 4x + 4}, & \text{за } x > -2 \\ -\frac{2}{2x^2 + 4x + 4}, & \text{за } x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

За $x = -2$ други извод није дефинисан (јер је $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x) - f'(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{|x+2|} \cdot \frac{2}{2x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \operatorname{sgn}(x+2)$, а последња гранична вредност не постоји).

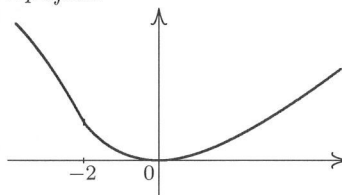
Дакле $f''(x) > 0$ за $x \in (-2, \infty)$, $f''(x) = 0$ за $x \in \emptyset$, $f''(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$.

Из претходних резултата се добија таблица

$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
+++	+++	+++
↘↘↘	↘↘↘	↗↗↗
nnn	uuu	uuu

помоћу које се лако црта график.

График:



30. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и монотона функција. Доказати да за свако $a \in \mathbb{R}$ важи

$$\int_0^1 |f(x) - a| dx \geq \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx.$$

Решење. Ако је f нерастућа, сменом $t = 1 - x$, $dt = -dx$, тврђење се своди на $\int_0^1 |f(1-t) - a| dt \geq \int_0^1 |f(1-t) - f(\frac{1}{2})| dt$. Како је $f(1-t)$ у том случају неоппадајућа, довољно је доказати тврђење за неоппадајуће функције.

Нека је f неоппадајућа функција. Нека је $g(a) = \int_0^1 |f(x) - a| dx$.

(а) Ако је $a < f(0)$, онда је $g(a) = \int_0^1 |f(x) - a| dx = \int_0^1 (f(x) - a) dx > \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx = g(0)$, па је приликом тражења уоченог минимума довољно посматрати случај $a \geq f(0)$.

(б) Ако је $a > f(1)$, онда је $g(a) = \int_0^1 |f(x) - a| dx = \int_0^1 (a - f(x)) dx > \int_0^1 (f(1) - f(x)) dx = g(1)$, па је приликом тражења уоченог минимума довољно посматрати случај $a \leq f(1)$.

(в) Нека је $f(0) \leq a \leq f(1)$. Како је f непрекидна, постоји $\alpha \in [0, 1]$, тако да је $f(\alpha) = a$. У даљем ћемо сматрати да је $\int_\alpha^\beta f(t) dt = - \int_\beta^\alpha f(t) dt$ ако

$$\begin{aligned} \text{је } \beta < \alpha. \text{ Важи } g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \int_0^1 \left| f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \right) dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx, \text{ па је } g(a) - g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \\ &= \int_0^\alpha (a - f(x)) dx + \int_\alpha^1 (f(x) - a) dx - \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right) = a(2\alpha - 1) + \\ &+ 2 \int_\alpha^{\frac{1}{2}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Ако је $\alpha < \frac{1}{2}$, следи $g(a) - g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = a(2\alpha - 1) + 2 \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} f(x)dx \geq a(2\alpha - 1) + 2 \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}} adx = 0$.

Ако је $\alpha > \frac{1}{2}$, следи $g(a) - g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = a(2\alpha - 1) - 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} f(x)dx \geq a(2\alpha - 1) - 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} adx = 0$.

Следи да g минимум достиже у $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

31. Нека је f непрекидно-диференцијабилна функција на $[0, 1]$. Доказати да важи

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx \geq (f(1) - f(0))(f(1) + f(0)).$$

Када се достиже једнакост?

Решење. Како је

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 (f'(x) - f(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx - 2 \int_0^1 f'(x)f(x)dx \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx - \left[(f(x))^2\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - \int_0^1 (f(x))^2 dx - (f(1))^2 + (f(0))^2, \end{aligned}$$

следи тражена неједнакост. Једнакост се достиже ако и само ако је $f'(x) = f(x)$ на (повезаном скупу) $[0, 1]$, тј. $f(x) = C \cdot e^x$ за неко $C \in \mathbb{R}$.

32. Одредити све непрекидно-диференцијабилне функција f на $[0, 1]$, тако да је $f(1) = -\frac{1}{6}$ и $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 f(x)dx$.

Решење. Уочени интеграли постоје (подинтегралне функције су непрекидне), а притом је $2 \int_0^1 f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{парцијална интеграција } u = f(x), \\ du = f'(x)dx, dv = dx, v = x \end{array} \right\} = \left[xf(x) \right]_0^1 = -\frac{1}{6} - \int_0^1 xf'(x)dx$, те се наведена неједнакост своди на $\int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2 \int_0^1 xf'(x)dx + \frac{1}{3} = \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 2 \int_0^1 xf'(x)dx + \int_0^1 x^2 dx \leq 0$, тј. на $\int_0^1 (f'(x) + x)^2 dx \leq 0$. Међутим, у последњем интегралу, подинтегрална функција је ненегативна и непрекидна, те мора бити $f'(x) + x = 0$, за $x \in [0, 1]$, те је $f(x) = -\frac{x^2}{2} + C$, за неко $C \in \mathbb{R}$, а како је $f(1) = -\frac{1}{6}$, следи $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$.

33. Нека је f непрекидна реална функција на $[0, \infty)$ таква да је $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$.

Решење. Како је f непрекидна на $[0, \infty)$, непрекидне су и $f(nx)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па интеграл $\int_0^1 f(nx) dx$ постоје за свако $n \in \mathbb{N}$. Даље је $\int_0^1 f(nx) dx - A = \int_0^1 (f(nx) - A) dx$, па је $0 \leq \left| \int_0^1 f(nx) dx - A \right| \leq \int_0^1 |f(nx) - A| dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } t = nx \\ dt = ndx \end{array} \right\} = \frac{1}{n} \cdot \int_0^n |f(t) - A| dt$. Како постоји $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 , тако да за свако $t > n_0$ важи $|f(t) - A| < \varepsilon$, па за свако $n > n_0$ важи $\frac{1}{n} \cdot \int_0^n |f(t) - A| dt = \frac{1}{n} \cdot \int_0^{n_0} |f(t) - A| dt + \frac{1}{n} \cdot \int_{n_0}^n |f(t) - A| dt \leq \frac{1}{n} \cdot (C + \int_{n_0}^n \varepsilon dt) = \frac{1}{n} \cdot (C + \varepsilon \cdot (n - n_0)) \rightarrow \varepsilon$ кад $n \rightarrow \infty$ (овде је $C = \int_0^{n_0} |f(t) - A| dt$).

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx - A = 0$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = A$.

34. Ако су $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне и растуће, доказати да је

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx.$$

Решење. Функције f, g и fg су непрекидне на $[0, 1]$, па уочени интеграл постоје. Заменом $f(x) + c$, где је $c \in \mathbb{R}$ произвољна константа, добија се еквивалентна неједнакост, а како је неједнакост симетрична по f и g , исто важи и за g , па како непрекидне функције достижу свој минимум на $[0, 1]$, следи да се без умањења општости може претпоставити да су f и g ненегативне.

Нека је $n \in \mathbb{N}$ и за $k \in \{1, \dots, n\}$ нека је $a_k = \max_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} f(x)$ и $b_k = \max_{x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} g(x)$. Како су f и g растуће, следи $a_k = f(\frac{k}{n})$ и $b_k = g(\frac{k}{n})$ за свако $k \in \{1, \dots, n\}$. Изрази $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ и $\frac{b_1 + \dots + b_n}{n}$ представљају горње Дарбуове суме за поделу интервала на n једнаких делова, па је

$$L = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

На основу неједнакости Чебишева (задатак 20 главе 1), следи

$$L \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} = D_n.$$

По претходном, D_n представља одговарајућу (горњу) Дарбуову суму функције fg на $[0, 1]$ (производ две ненегативне растуће функције је

ненегативна растућа функција), па како $D_n \rightarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx$ кад $n \rightarrow \infty$, следи тражена неједнакост.

35. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција. Одредити

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Решење. Нека је $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Ако је $M = 0$, следи $f(x) = 0$ за свако $x \in [0, 1]$, па тражена гранична вредност тривијално постоји и једнака је 0. У даљем, нека је $M > 0$.

По Вајерштрасовој теореме $|f(x)|$ достиже свој максимум на $[0, 1]$, па је $M < \infty$ и постоји $x_0 \in [0, 1]$ тако да је $|f(x_0)| = M$. Важи $\int_0^1 |f(x)|^p dx \leq \int_0^1 M^p dx = M^p$, па је $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M$.

По непрекидности, за свако $\varepsilon \in (0, M)$ постоје $c < d$ тако да је $x_0 \in [c, d]$ и $|f(x)| \geq M - \varepsilon$ за $x \in [c, d]$. Следи $\int_0^1 |f(x)|^p dx \geq \int_c^d |f(x)|^p dx \geq \int_c^d (M - \varepsilon)^p dx = (d - c)(M - \varepsilon)^p$, па је $\underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} ((d - c)^{\frac{1}{p}} (M - \varepsilon)) = M - \varepsilon$.

Како је $\varepsilon \in (0, M)$ произвољно, следи $\underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq M$, па следи екзистенција тражене граничне вредности и важи

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

36. Нека је $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ непрекидна функција. Одредити

$$\lim_{p \rightarrow 0+} \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Решење. Како је $f(x) > 0$, важи $|f(x)| = f(x)$ и добро су дефинисане $(f(x))^p$ и $\ln f(x)$ за свако $x \in [0, 1]$ (и интеграбилне на $[0, 1]$). По

непрекидности функције e^x , довољно је наћи $L = \lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p}$.

На основу Јенсенове неједнакости (функција $\ln x$ је конкавна на $(0, \infty)$) следи

$$\frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \geq \frac{\int_0^1 \ln(f(x))^p dx}{p} = \int_0^1 \ln f(x) dx,$$

па је $\lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$.

Како за $x > 0$ важи $\ln x \leq x - 1$, следи

$$\frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \leq \frac{\int_0^1 (f(x))^p dx - 1}{p} = \int_0^1 \frac{(f(x))^p - 1}{p} dx.$$

Како је f непрекидна, она достиже свој минимум m и максимум M на $[0, 1]$. Ако је $a \in [m, M]$ и $g_a(p) = \frac{a^p - 1}{p}$ за $p \in (0, 1]$, следи $\lim_{p \rightarrow 0+} g_a(p) = \ln a$

и $g'_a(p) = \frac{-a^p(1 - p \ln a) + 1}{p^2}$.

Како је $a^p \geq 1 + p \ln a$, следи $1 - p \ln a \leq a^{-p}$. За довољно мало p је $1 - p \ln a > 0$ и, притом, како је $a \in [m, M]$, може се изабрати довољно мало p тако да ово важи за свако a . Следи $a^p(1 - p \ln a) \leq a^p \cdot a^{-p} = 1$ и $a^p(1 - p \ln a) \geq (1 + p \ln a)(1 - p \ln a) = 1 - p^2 \ln^2 a$, па је $0 \leq g'_a(p) \leq \ln^2 a \leq C$, где C не зависи од a , јер $a \in [m, M]$.

На основу Лагранжове теореме, следи $g_a(p) - \ln a \leq Cp$, па за свако ε постоји p_0 , тако да за $p < p_0$ и свако $a \in [m, M]$ важи $\ln a \leq \frac{a^p - 1}{p} \leq \ln a + \varepsilon$. Следи

$$\frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \leq \int_0^1 (\ln(f(x)) + \varepsilon) dx = \int_0^1 \ln(f(x)) dx + \varepsilon,$$

па је $\lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \leq \int_0^1 \ln f(x) dx + \varepsilon$, а како је $\varepsilon > 0$ произвољно,

следи $\lim_{p \rightarrow 0+} \frac{\ln \int_0^1 (f(x))^p dx}{p} \leq \int_0^1 \ln f(x) dx$.

Следи да L постоји и важи $L = \int_0^1 \ln f(x) dx$, па тражена гранична вредност постоји и једнака је e^L .

37. Нека је $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ непрекидна бијективна функција и $a, b \in [0, \infty)$.

(а) Доказати да је $f(0) = 0$ и да је f строго растућа.

(б) Доказати да је $\int_0^b f^{-1}(x) dx = \int_0^{f^{-1}(b)} (b - f(x)) dx$.

(в) Доказати да важи $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx \geq ab$ и да се једнакост достиже ако и само ако је $b = f(a)$.

Решење. Како је f бијективна, постоји $u \in [0, \infty)$, тако да је $f(u) = 0$. Ако је $u \neq 0$, нека је $v = f(0)$ и $M = \max_{x \in [0, u]} f(x)$ (по Вајерштрасовој тео-

реми M је добро дефинисан). Како је f бијекција, постоји w тако да је $f(w) = M + 1$, а по претходном је $w \in (u, \infty)$, па f узима вредност v и на $[u, w]$ (непрекидна функција на повезаном скупу), што је немогуће, тј. мора бити $f(0) = 0$. Ако f није строго растућа, из бијективности следи да постоје $0 < c < d$ тако да је $f(c) > f(d)$, па ако је $m \in [f(d), f(c)]$, f (по непрекидности) узима вредност m и на $(0, c)$ и на (c, d) .

Следи да је добро дефинисана (па и монотона и непрекидна) функција f^{-1} , па је, након парцијалне интеграције и смене $t = f(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^b f^{-1}(x) dx &= \left[x f^{-1}(x) \right]_0^b - \int_0^b x d(f^{-1}(x)) = b f^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(t) dt \\ &= b \int_0^{f^{-1}(b)} dx - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x) dx = \int_0^{f^{-1}(b)} (b - f(x)) dx. \end{aligned}$$

Следи

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^{f^{-1}(b)} (b - f(x)) dx \\ &\geq \int_0^{\min\{a, f^{-1}(b)\}} f(x) dx + \int_0^{\min\{a, f^{-1}(b)\}} (b - f(x)) dx = b \cdot \min\{a, f^{-1}(b)\} \geq ab, \end{aligned}$$

и притом, како је $f(x)$ непрекидна и позитивна на $(0, a]$, а $b - f(x)$ непрекидна и позитивна на $[0, f^{-1}(b))$ (па је интеграл функција $f(x)$ и $b - f(x)$ по било ком затвореном интервалу који је подскуп одговарајућег претходно поменутог интервала, строго већи од нуле), следи да се једнакост достиже ако и само ако је $b = f(a)$.

38. Нека је $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

(а) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$. (б) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$.

Решење. (а) За свако $n \in \mathbb{N}$ подинтегрална функција је непрекидна, па дати интеграл постоје. Како је $0 \leq \sin(\pi x) \leq 1$ на $[0, 1]$, из неједнакости троугла за интеграл $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ следи $0 \leq \left| \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx \right| \leq \int_0^1 |x^n \sin(\pi x)| dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

(б) Како је

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n &= \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin(\pi x), dv = x^n \\ du = \pi \cos(\pi x) dx, v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \right\} \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \sin(\pi x) \right]_0^1 - \pi \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \cos(\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \cos(\pi x), dv = x^{n+1} \\ du = -\pi \sin(\pi x) dx, v = \frac{x^{n+2}}{n+2} \end{array} \right\} \\
&= \frac{\pi}{n+1} \cdot \left[-\frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \cos(\pi x) \right] \Big|_0^1 - \frac{\pi^2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{n+2} \cdot \sin(\pi x) dx \\
&= \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} \cdot I_{n+2}
\end{aligned}$$

и како је $I_n \geq 0$ за $n \in \mathbb{N}$, следи $I_n \leq \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{\pi}{n^2}$, одакле следи да дати ред конвергира, јер конвергира $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (поредбени критеријум за позитивне редове).

39. Нека је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ за $n \in \mathbb{N}$. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n - \ln \sqrt{n})$.

Решење. За $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin[(n+1)x] - \sin(nx)) \cdot (\sin[(n+1)x] + \sin(nx))}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2[(n+1)x] - \sin^2(nx)}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{(2n+1)x}{2} \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin[(2n+1)x] dx \\
&= \left[\frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Пошто је $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, индукцијом следи $I_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. Како је $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + c + o(1)$ кад $n \rightarrow \infty$, где је c Ојлерова константа, следи

$$\begin{aligned}
I_n - \ln(\sqrt{n}) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(\sqrt{n}) \\
&= \ln(2n) + c + o(1) - \frac{1}{2} \cdot (\ln n + c + o(1)) - \ln(\sqrt{n}) \\
&= \ln 2 + \ln n + \frac{c}{2} - \frac{\ln n}{2} - \frac{\ln n}{2} + o(1) = \ln 2 + \frac{c}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n - \ln \sqrt{n}) = \ln 2 + \frac{c}{2}$.

40. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$.

Решење. Како интеграл има својство адитивности по скупу, $n-1$ -ва парцијална сума датог реда износи $\int_1^n e^{-\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена } x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = \int_1^{\sqrt{n}} 2t \cdot e^{-t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t, v = e^{-t} \\ du = dt, dv = -e^{-t} \end{array} \right\} = [2t \cdot (-e^{-t})] \Big|_1^{\sqrt{n}} + 2 \int_1^{\sqrt{n}} e^{-t} = \frac{2}{e} - 2\sqrt{n} \cdot e^{-\sqrt{n}} + 2 \cdot [-e^{-t}] \Big|_0^{\sqrt{n}} = \frac{4}{e} - \frac{2(\sqrt{n}+1)}{e\sqrt{n}}.$

Како је $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, следи да низ парцијалних сума датог реда конвергира (тј. дати ред је конвергентан).

41. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k-1)^2 + n^2}.$

Решење. Како је $\frac{n}{(k-1)^2 + n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{k-1}{n})^2}$, сума под граничном вредношћу је одговарајућа Дарбуова сума функције $\frac{1}{1+x^2}$ на $[0, 1]$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{(k-1)^2 + n^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

42. Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos^3 \frac{k\pi}{2n}}{n}.$

Решење. Како је $\frac{\cos^3 \frac{k\pi}{2n}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos^3 \frac{k}{2} \pi$, сума под граничном вредношћу је одговарајућа Дарбуова сума функције $\cos^3 \frac{\pi x}{2}$ на $[0, 1]$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\cos^3 \frac{k\pi}{2n}}{n} = \int_0^1 \cos^3 \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 \frac{\cos \frac{3\pi x}{2} + 3 \cos \frac{\pi x}{2}}{4} dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{2}{3\pi} \cdot \sin \frac{3\pi x}{2} + 3 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3\pi} + \frac{6}{\pi} \right) = \frac{4}{3\pi}.$$

9. РЕДОВИ

1. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \frac{n+1}{n}$, у зависности од $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}^+$.

Решење. Како $\frac{1}{n^b} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, дати ред је, почев од неког члана, са позитивним члановима. Како је $n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \frac{n+1}{n} \sim n^a \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n^{a-b} \cdot \frac{1}{n} = n^{a-b-1}$ кад $n \rightarrow \infty$, по поредбеном критеријуму дати ред конвергира за $b > a$, а дивергира за $b \leq a$.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p}$ у зависности од реалног параметра p .

Решење. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, следи $1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ кад $n \rightarrow \infty$, па важи $\frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p} \sim \frac{\frac{1}{2n}}{\ln^p n} = \frac{1}{2n \ln^p n}$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{(\ln n)^p}$ (са позитивним члановима) конвергира (по поредбеном критеријуму) ако и само ако је $p > 1$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} - e \right]$ у зависности од $\alpha \in \mathbb{R}$.

Решење. Ако је $\alpha < 0$, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(1+m)}{m}} = 1$ (e^x је непрекидна функција), па општи члан реда не тежи нули. Такође, ако је $\alpha = 0$, општи члан реда је $2 - e$ и не тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, па за $\alpha \leq 0$ дати ред дивергира. Нека је $\alpha > 0$. Чланови полазног реда су негативни бројеви, јер је $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$ за $x > 0$, па дати ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} \right]$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - \left[\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha} \right]}{\frac{1}{n^\alpha}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot \left[e - e^{n^\alpha \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e \cdot n^\alpha \cdot \left[1 - 1 + \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right] = e, \end{aligned}$$

редови $\sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right)^{n^\alpha} \right]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ су еквиконвергентни (поредбени критеријум за позитивне редове).

Дакле, дати ред конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$.

4. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+a)^{n+b}}{(n+b)^{n+a}}$, у зависности од параметара $a, b > 0$.

Решење. За $a, b > 0$ дати ред је добро дефинисан са позитивним члановима. Како је $(n+a)^{n+b} = n^{n+b} \cdot \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+b} \sim e^a \cdot n^{n+b}$ кад $n \rightarrow \infty$, следи $\frac{(n+a)^{n+b}}{(n+b)^{n+a}} \sim e^{a-b} \cdot \frac{1}{n^{a-b}}$ кад $n \rightarrow \infty$, па по поредбеном критеријуму следи да дати ред конвергира за $a-b > 1$, а дивергира за $a-b \leq 1$.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha \sin^\beta \frac{1}{n}$, у зависности од параметара $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Решење. Дати ред је ред са позитивним члановима. Како је $(\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha \sin^\beta \frac{1}{n} \sim \left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1 \right)^\alpha \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^\beta \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{како } \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \\ \text{кад } n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \sim \left(1 + \frac{\ln n}{n} - 1 \right)^\alpha \cdot \frac{1}{n^\beta} = \frac{\ln^\alpha n}{n^{\alpha+\beta}}$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да дати ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{\alpha+\beta}}$, тј. ако и само ако је $\alpha + \beta > 1$ или $\alpha + \beta = 1 \wedge \alpha < -1$.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt[n]{n}}}$.

Решење. Дати ред је позитиван. Како је $n^{\sqrt[n]{n}} = n^{e^{\frac{1}{n} \cdot \ln n}} = n^{(1 + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n}))} = e^{(1 + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})) \cdot \ln n} = e^{\ln n + o(1)} = n \cdot e^{o(1)} = n + o(n)$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је $\frac{n!}{n^{\sqrt[n]{n}}} = \frac{n!}{n + o(n)} = \frac{(n-1)!}{1 + o(1)} \rightarrow \infty$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, општи члан датог реда не тежи нули, па он дивергира.

7. Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и нека је $a_n = \alpha \cdot \arctg n + \beta \cdot \arctg(n+1) + 2 \cdot \arctg(n+2)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Решење. Да би ред конвергирао, општи члан мора тежити нули, па је $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{2} \cdot (\alpha + \beta + 2)$. Дакле, ако је $\alpha + \beta \neq -2$, дати ред дивергира.

Иначе је $a_n = \beta \cdot [\arctg(n+1) - \arctg n] + 2 \cdot [\arctg(n+2) - \arctg n] = \beta \cdot \arctg \frac{1}{1+n+n^2} + 2 \cdot \arctg \frac{2}{1+2n+n^2}$ (за $x, y > 0$ важи $\arctg x - \arctg y = \arctg \frac{x-y}{1+xy}$). Како $\frac{1}{1+n+n^2} \rightarrow 0$ и $\frac{2}{1+2n+n^2} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је

$a_n = \frac{\beta+4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, односно $|a_n| = \frac{|\beta+4|}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ кад $n \rightarrow \infty$, па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, следи да за $\alpha + \beta = -2$ конвергира и дати ред.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ за $n \geq 1$. Онда је $a_n > 0$, за $n \in \mathbb{N}$, и важи

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}} = e \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{1-n \ln(1+\frac{1}{n})} \\ &= e^{1-n \cdot (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}))} = e^{\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})} = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

па ред дивергира (Гаусов критеријум, $\frac{1}{2} < 1$).

9. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $a_1 = a > 1$, $a_{n+1} = a_n + \ln a_n$ за $n \geq 1$.

(а) Доказати да важи $a_n \leq an^2$ за $n \geq 1$.

(б) Доказати да важи $a_n = o(n \ln^2 n)$, кад $n \rightarrow \infty$.

(в) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

Решење. Како је $\ln x > 0$ за $x > 1$, дати низ је добро дефинисан.

(а) Важи $a_1 = a \leq a \cdot 1^2$. Нека је $a_n \leq an^2$. Онда је $a_{n+1} = a_n + \ln a_n \leq a \cdot n^2 + \ln(a \cdot n^2) = a \cdot n^2 + 2 \ln n + \ln a$. Како је $\ln x \leq x - 1 < x$ за $x \in (0, \infty)$, следи $a_{n+1} \leq a \cdot n^2 + 2n + a \leq a \cdot n^2 + 2an + a = a \cdot (n+1)^2$, па је тврђење доказано индукцијом.

(в) Из Штолцове теореме, како је низ $(n \ln n)_{n \geq 2}$ растући и тежи ка ∞ кад $n \rightarrow \infty$, следи

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n \ln n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \ln a_n - a_n}{(n+1) \ln(n+1) - n \ln n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln \xi_n + 1},$$

где је $n < \xi_n < n+1$ (из Лагранжове теореме примењене на функцију $x \ln x$ на интервалу $[n, n+1]$ где је $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (одговарајућа непрекидност и диференцијабилност су очигледне), па је $(n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln \xi_n + 1$, где је $n < \xi_n < n+1$). Како је $\frac{\ln n+1}{\ln(n+1)+1} \leq \frac{\ln n+1}{\ln \xi_n+1} \leq \frac{\ln n+1}{\ln n+1}$ и како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n+1}{\ln(n+1)+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n+1}{\ln n+1} = 1$, по леми о два полицајца постоји и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n+1}{\ln \xi_n+1} = 1$. Следи

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n \ln n} &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln a_n}{\ln n+1} \cdot \frac{\ln n+1}{\ln \xi_n+1} \right) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln n+1} \leq \left\{ \text{no делу (a)} \right\} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a + 2 \ln n}{\ln n+1} = 2. \end{aligned}$$

Дати ред је са позитивним члановима, па како из претходног следи да је $\frac{1}{n \ln n} \asymp \frac{1}{a_n}$ кад $n \rightarrow \infty$, по поредбеном критеријуму он дивергира (јер дивергира $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$).

(б) Из доказаног у делу (в) следи $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 \ln n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$, одакле следи тврђење овог дела.

10. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 = 0$, $a_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k^2+1} \right) - \ln n$ за $n \in \mathbb{N}$.

(а) Доказати да низ $(a_n)_{n \geq 0}$ строго расте.

(б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$.

(в) Доказати да низ $(a_n)_{n \geq 0}$ конвергира.

(г) Одредити све реалне бројеве x за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a - a_n)x^n$, где је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Решење. Како је $\ln(1+x) < x$ за $x > -1$, следи $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n^2+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{n+1}{n^2+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n^2+1)} > 0$ за $n \geq 2$. Како је и $a_2 = 2 - \ln 2 > 1 = a_1 > 0 = a_0$, следи (а).

Како је $n^2(a_{n+1} - a_n) = n^2 \cdot \left[\frac{n+1}{n^2+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = n^2 \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{3}{2} + o(1)$, кад $n \rightarrow \infty$, следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n) = \frac{3}{2}$.

По (а), дати низ је монотон. Из (б), како је $a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ и ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, следи да је и ограничен, тј. следи да конвергира (ка неком $a > 0$).

За $x = -1$, пошто је низ $(a - a_n)_{n \geq 1}$ монотono опадајући и тежи ка 0, ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a - a_n)$ конвергира (Лајбницов критеријум).

Како је $a - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} (a_{k+1} - a_k)$ и (по претходно доказаном) почев од неког k важи $a_{k+1} - a_k \geq \frac{1}{k^2}$, следи да је $a - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_n^{\infty} = \frac{1}{n}$, па је $a - a_n \geq \frac{1}{n}$ (за довољно велико n). Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, дивергира и дати ред за $x = 1$.

Из конвергенције датог реда за $x = -1$ следи да он конвергира за $|x| < 1$, а из дивергенције за $x = 1$ следи да дивергира за $|x| > 1$.

11. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира, тада конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$. Доказати.

Решење. Из неједнакости Коши–Шварц–Буњаковског следи $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$, па како $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергирају, следи апсолутна (а самим тим и обична) конвергенција датог реда.

12. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_{n+2}$ за $n \in \mathbb{N}$. У зависности од $\alpha, x \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha x^n$.

Решење. Трансформацијом дате везе, добија се $a_{n+2}(a_n + 1) = a_{n+1}(a_{n+1} + 1)$. Индукцијом се добија да важи $a_n > 0$, па се дата веза може трансформисати и у облик $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+2}+1}$, тј. ако је $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+1}$ за $n \geq 1$, у облик $b_{n+1} = b_n$ за $n \geq 1$. Следи $b_n = b_1 = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$ за $n \geq 1$, тј. $a_{n+1} - \frac{5}{3} \cdot a_n = \frac{5}{3}$ за $n \geq 1$ (нехомогена линеарна рекурентна једначина). Следи $a_n = A + B \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$ за $n \geq 1$, односно, када се уврсте почетни услови, $a_n = \frac{27}{10} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{5}{2}$ за $n \geq 1$. Следи $|a_n^\alpha x^n| \sim \left(\frac{27}{10}\right)^\alpha \cdot \left[\left(\frac{5}{3}\right)^\alpha x\right]^n$ кад $n \rightarrow \infty$, па ред конвергира за $|x| < \left(\frac{3}{5}\right)^\alpha$, а дивергира за $|x| \geq \left(\frac{3}{5}\right)^\alpha$ (поредбени критеријум за позитивне редове).

13. (а) Одредити нуле функције $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^x - 1 - 2x$.

(б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, где је низ $(c_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $0 < c_0 < 1$, $c_{n+1} = \frac{e^{c_n} - 1}{2}$ за $n \geq 0$.

(в) Доказати да је низ $(2^n c_n)_{n \geq 0}$ монотон.

(г) Наћи све $t \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$.

Решење. (а) Како је $\phi'(x) = e^x - 2$, следи да ϕ опада на $(-\infty, \ln 2)$ и расте на $(\ln 2, \infty)$. Како је $\phi(\ln 2) = 1 - 2 \ln 2 = -\ln \frac{4}{e} < 0$, на овим интервалима ϕ има тачно по једну нулу. На првом је то $x = 0$, а на другом неко $\alpha \in (1, 2)$ ($\alpha \approx 1,25643$).

(б) Како је $c_{n+1} = \frac{e^{c_n} - 1}{2} \leq \frac{2c_n}{2} = c_n$, дати низ је нерастући. Индукцијом следи да је он и ненегативан, па он и конвергира. Пуштањем граничне вредности у релацији којом је дефинисан, добија се да је $\phi(l) = 0$, где је $l = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Како је низ нерастући и $c_0 < 1$, низ не може конвергирати ка α , па је $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

(в) Како је $c_{n+1} = \frac{e^{c_n} - 1}{2} = \frac{e^{c_n} - 2c_n - 1 + 2c_n}{2} = c_n + \frac{\phi(c_n)}{2}$, множењем са 2^n

се добија $2^{n+1}c_{n+1} = 2^n c_n + \phi(c_n) \geq 2^n c_n$ за $n \geq 0$, тј. низ $(2^n c_n)_{n \geq 0}$ је неоппадајући.

(г) Како $c_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$ следи (за $x \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x| \cdot \frac{e^{c_n} - 1}{c_n} = |x| \cdot \frac{c_n + o(c_n)}{2c_n} = \frac{|x|}{2},$$

дати ред конвергира за $|x| < 2$, а дивергира за $|x| > 2$. За $x = \pm 2$, по (в), апсолутна вредност опшег члана не опада, па не тежи нули, тј. и у овом случају ред дивергира.

14. Нека је низ $(b_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_{n+1} = b_n - 2b_n^2$ за $n \in \mathbb{N}$.

(а) Доказати да важи $b_n \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+3}$ за $n \in \mathbb{N}$.

(б) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2nb_n)$ дивергентан.

(в) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 2nb_n)$ конвергентан.

(г) Одредити све $\alpha, x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + nb_n) \cdot x^n$.

Решење. (а) Функција $f(x) = x - 2x^2$ на $\left[0, \frac{1}{2(n+3)}\right]$ за $n \geq 1$ достиже минимум за $x = 0$, а максимум за $x = \frac{1}{2(n+3)}$. Њихове вредности су $f(0) = 0$ и $f\left(\frac{1}{2(n+3)}\right) = \frac{1}{2(n+3)} - 2 \cdot \frac{1}{4(n+3)^2} = \frac{n+2}{2(n+3)^2} < \frac{1}{2(n+4)}$, тј. важи $f\left(\left[0, \frac{1}{2(n+3)}\right]\right) \subseteq \left[0, \frac{1}{2(n+4)}\right]$, па тврђење (а) следи индукцијом (база је $b_1 = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2(1+3)}$, а корак следи из горње инклузије).

(б) Из (а) следи $1 - 2nb_n \geq 1 - \frac{2n}{2(n+3)} = \frac{3}{n+3} > 0$, па је ред $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2nb_n)$ са позитивним члановима и, по поредбеном критеријуму, дивергира.

(в) Како је $1 - 2(n+1)b_{n+1} \leq 1 - 2nb_n \Leftrightarrow nb_n \leq (n+1)b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \cdot b_n \leq (1 - 2b_n)b_n \Leftrightarrow 0 \leq 2b_n \left(\frac{1}{2(n+1)} - b_n\right)$ и како последње тврђење следи непосредно из (а), следи да је низ $(1 - 2nb_n)_{n \geq 1}$ монотон. Како он конвергира ка нули, следи конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 2nb_n)$, по Лајбницевог критеријуму.

(г) Из претходних закључака следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = \frac{1}{2}$.

(1) Ако је $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, дати ред тривијално конвергира за $x = 0$, а ако $x \neq 0$, важи $\left| \frac{(\alpha + (n+1)b_{n+1}) \cdot x^{n+1}}{(\alpha + nb_n) \cdot x^n} \right| \sim |x| \cdot \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha + \frac{1}{2}} \sim |x|$ кад $x \rightarrow \infty$, па по Даламберовом критеријуму следи да ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. Ако је $|x| = 1$ апсолутна вредност опшег члана реда тежи ка $\alpha + \frac{1}{2} \neq 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па дати ред дивергира.

- (2) Ако је $\alpha = -\frac{1}{2}$, по (б) ред дивергира за $x = 1$, а по (в) конвергира за $x = -1$, па конвергира ако и само ако $x \in [-1, 1)$ (степенни ред са центром у нули).

15. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{(n+2)a_n + 1}$ за $n \geq 0$.

(а) Доказати да важи $\frac{1}{n + \frac{q}{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ за неко q и $n \geq 1$.

(б) У зависности од $x \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Решење. Нека је низ $(\frac{1}{b_n})_{n \geq 0}$ дефинисан са $b_n = \frac{1}{a_n}$ за $n \geq 0$. Онда је $b_{n+1} = \frac{n+2+b_n}{2}$ за $n \geq 0$ и $b_0 > 0$.

За (а) треба доказати да за неко q важи $n \leq b_n \leq n + \frac{q}{n}$.

Важи $b_0 > 0$. Ако је $b_n > n$ за неко n , онда је $b_{n+1} = \frac{n+2+b_n}{2} > \frac{n+2+n}{2} = n+1$, па за свако n важи $b_n > n$ (индукција).

Слично, ако је, на пример, $q = \frac{1}{2a_0}$, следи $b_1 = \frac{2+b_0}{2} = 1 + \frac{1}{2a_0}$. Ако за неко n важи $b_n \leq n + \frac{q}{n}$, онда је $b_{n+1} = \frac{n+2+b_n}{2} \leq \frac{n+2+n+\frac{q}{n}}{2} = n+1 + \frac{q}{2n} \leq n+1 + \frac{q}{n+1}$ (овим је завршен доказ дела (а)).

Следи да за довољно велико n важи $b_n < n+1$, па за такве n важи $b_{n+1} - b_n = \frac{n+2-b_n}{2} > \frac{1}{2} > 0$, тј. низ $(b_k)_{k \geq n}$ расте, односно низ $(a_n)_{n \geq 0}$ опада почев од неког члана (очигледно ка 0). Такође је $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.

За све $x \neq 0$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} \right) = |x|$, па, по Даламберовом критеријуму, дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = 1$, дати ред је еквиконвергентан са редом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тј. дивергира.

За $x = -1$ ред је алтернирајући и, како је горе показано, његови чланови почев од неког монотонно теже нули, па конвергира (Лајбницов критеријум).

Напомена. Ред из дела (б) је степенни, са центром у нули. По претходно доказаном и Коши-Адамаровој формули, радијус конвергенције реда је $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}} = 1$, па се и овако могло закључити да ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

16. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $a_1 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = \frac{-a_n}{1 + (-1)^{n+1}a_n}$, за $n \geq 1$.

(а) Израчунати a_n .

(б) Одредити све реалне бројеве x за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и израчунати његов збир за $\alpha = \frac{1}{2}$.

Решење. (а) Трансформисањем се добија $(-1)^{n+2} a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} a_n}{1 + (-1)^{n+1} a_n}$. Нека је $b_n = (-1)^{n+1} a_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Онда важи $b_1 = \alpha$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{1+b_n}$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је $c_{n+1} = c_n$, $d_{n+1} = c_n + d_n$ за $n \geq 2$, $c_1 = \alpha$, $d_1 = 1$. Дати низови су, очигледно, добро дефинисани и низ $(c_n)_{n \geq 1}$ је низ позитивних бројева, па је добро дефинисан низ $(\frac{c_n}{d_n})_{n \geq 0}$ и важи $b_n = \frac{c_n}{d_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Елиминацијом се из горњег система рекурентних једначина добија $d_{n+2} - 2d_{n+1} + d_n = 0$, одакле је $d_n = A + Bn$, $c_n = A$. Уврштавањем почетних услова, добија се $d_n = \alpha n + (1 - \alpha)$, $c_n = \alpha$, тј. $b_n = \frac{\alpha}{\alpha n + (1 - \alpha)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(n-1)}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Коначно $a_n = \frac{(-1)^{n+1} \alpha}{1 + (n-1)\alpha}$ за $n \in \mathbb{N}$.

(б) Из (а) следи да важи $|a_n x^n| \sim \frac{|x|^n}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$, па дати ред апсолутно конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ (поредбени критеријум за позитивне редове). Последњи ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| \geq 1$ (за $x = 0$ ред конвергира; како је $\frac{|x|^{n+1}}{\frac{n+1}{|x|^n}} = |x| \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow |x|$, кад $n \rightarrow \infty$, тврђење следи из Даламберовог

критеријума; за $|x| = 1$ добија се ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, који дивергира).

За $x = -1$ дати ред је са негативним члановима (тј. чланови су константног знака, пошто је $a_n(-1)^n = -\frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha}$), па по претходном дивергира. Слично, за $x = 1$ дати ред је алтернирајући па конвергира по Лајбницеовом критеријуму, јер низ $(\frac{\alpha}{1+(n-1)\alpha})_{n \geq 1}$ монотono тежи нули. Дакле, дати ред конвергира ако и само ако је $-1 < x \leq 1$.

За $\alpha = \frac{1}{2}$ је $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, па важи

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot x^n = \frac{1}{x} \cdot \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \left(x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right) = 1 - \frac{\ln(1+x)}{x}, \end{aligned}$$

за $x \in (-1, 0) \cup (0, 1]$, односно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$ за $x = 0$.

17. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где је $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$

за $n \in \mathbb{N}_0$ и

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha}{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ кад } n \rightarrow \infty.$$

Решење. Кад $n \rightarrow \infty$ важи

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{\alpha-1}{n} + \frac{1-\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, па како (за $x \neq 0$) важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x|$, по Даламберовом критеријуму следи да дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = 1$, по Гаусовом критеријуму, следи да дати ред конвергира ако и само је $\alpha - 1 < -1$, тј. ако и само ако је $\alpha < 0$.

За $x = -1$, по претходном, следи да за $\alpha < 0$ ред апсолутно конвергира. За $\alpha > 1$ из (*) следи да је (за довољно велико n) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, тј. дати низ је почев од неког члана растући. Следи да не тежи нули, па не може конвергирати ни дати ред.

За $0 \leq \alpha < 1$ (и $x = -1$) из (*) следи да је (за довољно велико n и неко $c > 0$) $a_{n+1} < a_n \cdot \left(1 - \frac{c}{n}\right)$, па следи да за неко n и $c > 0$ и свако $m > n$ важи да је почев од тог n дати низ нерастући и важи $a_m < a_n \cdot \left(1 - \frac{c}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{c}{m-1}\right)$. Из дивергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, па у овом случају из Лајбницевог критеријума следи конвергенција датог реда.

За $\alpha = 1$ (и $x = -1$), слично претходном случају, се добија да за неко n и $c > 0$ и све $m > n$ важи $a_m > a_n \cdot \left(1 - \frac{c}{n^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{c}{(m-n+1)^2}\right)$, па из конвергенције $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следи да $a_n \not\rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па у овом случају дати ред дивергира.

18. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 = 0$, $a_1 = 5$, $a_{n+2} = \frac{a_n + 3a_{n+1}}{4}$ за $n \geq 0$. У зависности од $x \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Решење. Карактеристична једначина датог (линеарног рекурентног) низа је $\lambda^2 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{1}{4} = 0$, па како су њена решења 1 и $-\frac{1}{4}$, следи $a_n = A + B \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ за $n \geq 0$. Уврштавањем почетних услова, добија се $A = 4$, $B = -4$, тј. $a_n = 4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ за $n \geq 0$ (па следи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$).

За $x = 0$ дати ред конвергира. Иначе, како је $\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \rightarrow \left| \frac{4x}{4} \right| = |x|$ кад $n \rightarrow \infty$, по Даламберовом критеријуму следи да дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. За $|x| = 1$ ред дивергира, јер му општи члан не тежи нули.

19. Нека су $x, \lambda \in \mathbb{R}$ и $(a_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $a_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$.

(а) Доказати да важи $a_n \sim \sqrt{n}$ кад $n \rightarrow \infty$.

(б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n$.

(в) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\lambda} x^n$.

Решење. Индукцијом следи да су сви чланови низа $(a_n)_{n \geq 1}$ позитивни (одавде следи и добра дефинисаност). Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2a_n} > 0$, низ $(a_n)_{n \geq 1}$ расте. Ако би постојала коначна гранична вредност $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, преласком на граничну вредност у $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ се добија $a = a + \frac{1}{2a}$, тј. $\frac{1}{2a} = 0$, што је немогуће. Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

(а) Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{4a_n^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{како је } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \end{array} \right\} = 1$, следи (а).

(б) Како је $n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{2a_n^2} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{како } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2a_n^2} \rightarrow 0 \end{array} \right\} = n \cdot \left(\frac{1}{2a_n^2} + o \left(\frac{1}{2a_n^2} \right) \right) = \frac{n}{2a_n^2} + o \left(\frac{n}{2a_n^2} \right) = \{no (a)\} = \frac{1}{2} + o(1)$, па како је e^x непрекидна функција, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{2} + o(1)} = \sqrt{e}$.

(в) Из (а) следи $|a_n n^{\lambda} x^n| \sim n^{\lambda + \frac{1}{2}} |x|^n$ кад $n \rightarrow \infty$. За $x = 0$ дати ред конвергира. За $x \neq 0$ важи $\frac{|a_{n+1}(n+1)^{\lambda} x^{n+1}|}{|a_n n^{\lambda} x^n|} \sim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\lambda + \frac{1}{2}} \cdot |x| \sim |x|$ кад $n \rightarrow \infty$, па по Даламберовом критеријуму дати ред апсолутно конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = 1$, дати ред је позитиван, па по претходном следи $a_n n^{\lambda} x^n \sim n^{\lambda + \frac{1}{2}}$ кад $n \rightarrow \infty$, па по поредбеном критеријуму за позитивне редове (поређење са $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$) следи да дати ред конвергира за $\lambda < -\frac{3}{2}$, а дивергира за $\lambda \geq -\frac{3}{2}$.

За $x = -1$ дати ред је алтернирајући. Као и за $x = 1$ следи $|a_n n^{\lambda} x^n| \sim n^{\lambda + \frac{1}{2}}$ кад $n \rightarrow \infty$, па ред апсолутно конвергира за $\lambda < -\frac{3}{2}$, а дивергира за $\lambda \geq -\frac{1}{2}$ (јер му општи члан не тежи ка нули). Како је $\frac{a_{n+1}(n+1)^{\lambda}}{a_n n^{\lambda}} =$

$\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, што је мање од 1 почев од неког $m \in \mathbb{N}$, по Лајбницовом критеријуму следи (условна) конвергенција датог реда за $-\frac{3}{2} \leq \lambda < -\frac{1}{2}$.

20. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}}$.

(а) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{n}$.

(б) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\lambda x^n$ у зависности од $x, \lambda \in \mathbb{R}$.

Решење. (а) Индукцијом следи добра дефинисаност и позитивност. Како је функција $\sqrt{x}$ растућа на $(0, \infty)$, следи $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n^2}} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$, тј. дати низ је неоппадајући. Ако би био и ограничен, постојала би гранична вредност $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Из дате рекурентне везе се добија $a = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$ (јер је функција $x \rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ непрекидна на $(0, \infty)$). Како последња једначина нема решења, добија се контрадикција, па је дати низ неограничен, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^4}{n} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^4 - a_n^4}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(a_n^2 + \frac{1}{a_n^2} \right)^2 - a_n^4 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{a_n^4} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{како је } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \end{array} \right\} = 2$.

(б) Из (а) следи да важи $a_n \sim (2n)^{\frac{1}{4}}$ кад $n \rightarrow \infty$.

За $x = 0$ дати ред конвергира. За $x \neq 0$ важи $\left| \frac{a_{n+1}^\lambda x^{n+1}}{a_n^\lambda x^n} \right| = |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^\lambda \sim |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{\lambda}{4}}$ кад $n \rightarrow \infty$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}^\lambda x^{n+1}}{a_n^\lambda x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{\lambda}{4}} = |x|$. По Даламберовом критеријуму следи да дати ред апсолутно конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = 1$ добија се позитиван ред и важи $a_n^\lambda \sim (2n)^{\frac{\lambda}{4}}$, па конвергира (поредбени критеријум за позитивне редове) ако и само ако је $\frac{\lambda}{4} < -1$, тј. ако и само ако је $\lambda < -4$.

За $x = -1$ добија се алтернирајући ред, па како је по (а) низ $(a_n)_{n \geq 1}$ монотон и тежи ка ∞ кад $n \rightarrow \infty$, следи да низ $(a_n^\lambda)_{n \geq 1}$ монотонно тежи нули за $\lambda < 0$, а не тежи нули за $\lambda \geq 0$. Дакле, за $x = -1$ ред дивергира за $\lambda \geq 0$ (општи члан не тежи нули), а конвергира за $\lambda < 0$ (по Лајбницовом критеријуму).

21. Нека је $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n}$, за $n \geq 0$.

(а) Одредити константе c и α , тако да важи $a_n \sim cn^\alpha$, ($n \rightarrow \infty$).

(б) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^\gamma$, где је $\gamma \in \mathbb{R}$.

Решење. Индукцијом следи да је дати низ растући и добро дефинисан. Ако би био и ограничен, он би конвергирао. Онда би $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ задовољавао једначину $a = a + 2\sqrt{a}$ (пуштањем граничне вредности у релацији којом је дефинисан низ), одакле је $a = 0$, што је немогуће (растући низ позитивних бројева не може конвергирати ка нули). Дакле, дати низ не конвергира ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$).

(а) Ако тражене константе постоје, по претходно доказаном мора бити $\alpha > 0$. Како $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, за $\beta > 0$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\beta}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ } (n)_{n \geq 1} \\ \text{монотонно расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\beta - a_n^\beta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n^\beta \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{\sqrt{a_n}} \right)^\beta - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n^\beta \cdot \left(\left(1 + \frac{2\beta}{\sqrt{a_n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) \right) - 1 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\beta \cdot a_n^{\beta-\frac{1}{2}} + o\left(a_n^{\beta-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Последња гранична вредност је коначан број различит од нуле ако је $\beta = \frac{1}{2}$, па је $a_n \sim n^2$ кад $n \rightarrow \infty$, тј. $\alpha = 2$, $c = 1$.

(б) По (а) и поредбеном критеријуму, дати ред конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\gamma}$, тј. ако и само ако је $\gamma < -\frac{1}{2}$.

22. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_1 = a \in (0, \infty)$, $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n+x_n^2}$ за $n \geq 1$. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$.

Решење. Како је $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, следи добра дефинисаност низа $(x_n)_{n \geq 1}$. Индукцијом лако следи и његова позитивност. За $x > 0$ је $x^2 + x + 1 > 0$, па је $x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n+x_n^2} \leq x_n$, тј. дати низ је нерастући, а како је ограничен одоздо (са 0), следи да је и конвергентан. Ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, пуштањем граничне вредности у дату рекурентну везу (састављену од непрекидних функција), следи $x = \frac{x}{1+x+x^2} \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$, па како је дати низ низ позитивних бројева, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Дакле ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ конвергира по Лајбницевог критеријуму.

Како је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ низ позитивних бројева, апсолутна конвергенција је еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Нека је $\beta < 0$. Онда,

по претходном, важи $x_n^\beta \rightarrow \infty$ кад $n \rightarrow \infty$. Важи и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\beta}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^\beta - x_n^\beta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x_n}{1 + x_n + x_n^2} \right)^\beta - x_n^\beta \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\beta \cdot \left[(1 + x_n + x_n^2)^{-\beta} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\beta \cdot (1 - \beta x_n + o(x_n) - 1) = -\beta \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{\beta+1} + o(x_n^{\beta+1})). \end{aligned}$$

Дакле, да би резултат претходне граничне вредности био коначан број, различит од 0, мора бити $\beta = -1$ и тада важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{-1}}{n} = 1$, тј.

$x_n \sim \frac{1}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$. Следи, ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ дивергира (поредбени критеријум за позитивне редове), тј. дати ред не конвергира апсолутно.

23. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1$, за $n \geq 1$.

(а) Испитати конвергенцију низа $(x_n)_{n \geq 1}$ и у случају ковергенције одредити његову граничну вредност.

(б) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Решење. Индукцијом следи да је $x_n > 0$ за $n \geq 1$, тј. ограниченост одоздо. Из Бернулијеве неједнакости следи $x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n} - 1 \leq 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x_n - 1 = x_n$ за $n \geq 1$, па је дати низ нерастући. Следи да је дати низ конвергентан. Нека је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Како је рекурентна веза састављена од непрекидних функција, следи $x = \sqrt{1 + 2x} - 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 = 1 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(б) Нека је $\beta < 0$. Тада (по (а)) важи $x_n^\beta \rightarrow \infty$ кад $n \rightarrow \infty$. Важи и

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\beta}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^\beta - x_n^\beta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left((1 + 2x_n)^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^\beta - x_n^\beta \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(x_n - \frac{1}{2} \cdot x_n^2 + o(x_n^2) \right)^\beta - x_n^\beta \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\beta \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{2} x_n + o(x_n) \right)^\beta - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\beta \cdot \left(-\frac{\beta x_n}{2} + o(x_n) \right) \\ &= -\frac{\beta}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^{\beta+1} + o(x_n^{\beta+1})). \end{aligned}$$

Дакле, да би вредност претходне граничне вредности био коначан број, различит од 0, мора бити $\beta = -1$ и тада важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_n)^{-1}}{n} = \frac{1}{2}$, тј. $x_n \sim \frac{2}{n}$, односно дати ред дивергира (поредбени критеријум за позитивне редове).

24. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 = a \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \arctg x_n$, за $n \geq 0$. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^\gamma$, где је $\gamma \in \mathbb{R}$.

Решење. Како је $(x - \arctg x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} \geq 0$ ($= 0 \Leftrightarrow x = 0$), ова функција расте на $(0, \infty)$. Како је $(x - \arctg x)(0) = 0$, она је на $(0, \infty)$ позитивна. Ако је $a > 0$, индукцијом лако следи да је дати низ ненегативан, а како је и $x_{n+1} = -(x_n - \arctg x_n) + x_n \leq x_n$ (по претходно доказаном), он је и нерастући, па конвергира. Нека је $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ, следи $l = \arctg l$, тј. (опет по претходном) $l = 0$. Ако је $a < 0$, низ $(y_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $y_n = -x_n$ за $n \geq 0$ по претходном тежи нули, па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (одавде је јасно да је за испитивање конвергенције датог реда довољно испитати случај $a \geq 0$).

Ако је $a = 0$, дати низ је константно једнак нули, па дати ред тривијално конвергира за $\gamma > 0$, а није ни дефинисан за $\gamma \leq 0$. Ако је $a > 0$, сви чланови су позитивни. За $\alpha > 0$, како је $\arctg x_n = x_n - \frac{x_n^3}{3} + o(x_n^3)$ кад $n \rightarrow \infty$ (јер $x_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$), важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_n^\alpha}}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n)_{n \geq 1} \text{ расте и тежи ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\alpha - x_{n+1}^\alpha}{x_n^\alpha x_{n+1}^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\alpha - \left(x_n - \frac{x_n^3}{3} + o(x_n^3)\right)^\alpha}{x_n^{2\alpha} + o(x_n^{2\alpha})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\alpha \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{x_n^2}{3} + o(x_n^2)\right)^\alpha\right]}{x_n^{2\alpha} + o(x_n^{2\alpha})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^\alpha \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha x_n^2}{3} + o(x_n^2)\right)^\alpha\right]}{x_n^{2\alpha} + o(x_n^{2\alpha})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha x_n^{\alpha+2}}{3} + o(x_n^{\alpha+2})}{x_n^{2\alpha} + o(x_n^{2\alpha})}. \end{aligned}$$

Претходна гранична вредност је коначна и различита од нуле за $\alpha = 2$, па следи да је $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, па дати ред конвергира (поредбени критеријум за позитивне редове) ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{2}}}$, тј. ако и само ако је $\gamma > 2$.

25. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $x_0 > 0$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$.

(а) Испитати да ли низ $(x_n)_{n \geq 0}$ конвергира и у потврдном случају одредити колика му је гранична вредност.

(б) Одредити константе C и α , такве да важи $x_n \sim Cn^\alpha$, кад $n \rightarrow \infty$.

(в) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_0 + x_1 + \dots + x_n}$.

Решење. (а) Индукцијом се добија да су чланови датог низа позитивни. Следи $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} > 0$ за $n \geq 0$, па је дати низ растући. Ако би био и ограничен, он би и конвергирао, па ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, из $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ и особина граничне вредности следи $x = x + \frac{1}{x}$, што је немогуће. Дакле, низ $(x_n)_{n \geq 0}$ није конвергентан.

(б) Ако је $x_n \sim cn^\alpha$ кад $n \rightarrow \infty$, из $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ следи $c, \alpha > 0$. Следи да важи

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{cn^\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (cn^\alpha)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{c((n+1)^\alpha - n^\alpha)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{cx_n n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right)} \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{cn^\alpha}{x_n} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)} \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{како } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn^\alpha}{x_n} \text{ постоји, коначан} \\ \text{је и различит од нуле} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn^\alpha}{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha n^{2\alpha-1} + o(n^{2\alpha-2})} \\ &= \frac{1}{c^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha n^{2\alpha-1} + o(n^{2\alpha-2})}, \end{aligned}$$

што је коначан број различит од нуле само за $\alpha = \frac{1}{2}$. Тражена гранична вредност једнака је тада $\frac{2}{c^2}$, па је $c = \sqrt{2}$, тј. $x_n \sim \sqrt{2}n$ кад $n \rightarrow \infty$.

(в) Нека је $\beta > 0$. Онда је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n^\beta} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ} \\ (n^\beta)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{(n+1)^\beta - n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n^\beta \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta - 1 \right)} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{како } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt{n}} \text{ постоји, коначан} \\ \text{је и различит од нуле} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^\beta \left(1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)} = \left\{ \text{но (б)} \right\} \\ &= \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\beta-1} + o(n^{\beta-1})}, \end{aligned}$$

што је коначан број различит од нуле за $\beta = \frac{3}{2}$, тј. важи $\frac{1}{x_0 + x_1 + \dots + x_n} \sim \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира, конвергира

и ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_0+x_1+\dots+x_n}$ (поредбени критеријум за редове са позитивним члановима).

26. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{e^{a_n} - 1}$ за $n \geq 0$. У зависности од $x \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Решење. Ако је $a_n > 0$, следи $e^{a_n} > 0$, па је и $a_{n+1} > 0$. Како је $a_1 > 0$, индукцијом следи да је дати низ позитиван.

Како је $e^x > 1 + x$ за свако $x \in \mathbb{R}$, следи $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{e^{a_n} - 1} = \frac{a_n}{e^{a_n} - 1} \cdot a_n < a_n$, тј. дати низ је опадајући. Следи да је дати низ конвергентан. Ако је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, из дате рекурентне везе (како је функција $\frac{x^2}{e^x - 1}$ непрекидна на $(0, \infty)$) следи $a = \frac{a^2}{e^a - 1}$, па како за $a > 0$ следи $a = \frac{a}{e^a - 1} \cdot a < a$, што је немогуће, мора бити $a = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

За $x = 0$ дати ред конвергира. Иначе, важи $\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \left| \frac{a_n}{e^{a_n} - 1} \right| = |x| \cdot \left| \frac{a_n}{a_n + o(a_n)} \right| \rightarrow |x|$ кад $n \rightarrow \infty$, па из Даламберовог критеријума следи да дати ред апсолутно конвергира за $x < 1$, а дивергира за $x > 1$.

За $x = -1$, из $0 < a_{n+1} < a_n$ за $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ по Лајбницеовом критеријуму следи конвергенција датог реда.

За $x = 1$ дати ред се своди на $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, следи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{a_n}{a_n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема,} \\ \text{низ } (n)_{n \geq 1} \text{ строго расте ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{a_n} - 1}{a_n^2} - \frac{1}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2) - 1 - a_n}{a_n^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} o(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $a_n \sim \frac{2}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$, па дати ред дивергира.

27. Нека је низ $(a_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n + \ln(1+a_n)}{2}$ за $n \geq 0$.

(а) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(б) У зависности од $x \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Решење. (а) Како је $(\ln(1+x) - x)' = -\frac{x}{x+1} < 0$ и $(\ln(1+x) - x)(0) = 0$, следи да за $x > 0$ важи $\ln(1+x) < x$. Како за $a_n > 0$ важи $a_{n+1} = \frac{a_n + \ln(1+a_n)}{2} > 0$ и $a_{n+1} = \frac{a_n + \ln(1+a_n)}{2} < \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$, индукцијом следи да је дати низ опадајући и ограничен одоздо. Ако је $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, пуштањем

граничне вредности у релацију којом је низ дефинисан, добија се $l = \ln(1+l)$, па (како је $l \geq 0$) следи да је $l = 0$.

(б) По (а) важи $a_n \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па је $\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n)$ кад $n \rightarrow \infty$. Следи да је $\frac{a_n + \ln(1+a_n)}{2} = a_n - \frac{a_n^2}{4} + o(a_n^2)$ кад $n \rightarrow \infty$, па за $\alpha > 0$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n^\alpha}}{n} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Штолцова теорема, низ } (n)_{n \geq 1} \\ \text{је монотонно растући и тежи ка } \infty \end{array} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\alpha - a_{n+1}^\alpha}{a_n^\alpha a_{n+1}^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\alpha - \left(a_n - \frac{a_n^2}{4} + o(a_n^2)\right)^\alpha}{a_n^{2\alpha} + o(a_n^{2\alpha})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\alpha \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{a_n}{4} + o(a_n)\right)^\alpha\right]}{a_n^{2\alpha} + o(a_n^{2\alpha})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\alpha \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha \cdot a_n}{4} + o(a_n)\right)\right]}{a_n^{2\alpha} + o(a_n^{2\alpha})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha \cdot a_n^{\alpha+1}}{4} + o(a_n^{\alpha+1})}{a_n^{2\alpha} + o(a_n^{2\alpha})}. \end{aligned}$$

Последња гранична вредност је коначан број различит од нуле за $\alpha = 1$ и тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{1}{4}$, одакле је $a_n \sim \frac{4}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$.

За $x \neq 0$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n+1}}{\frac{4}{n}} = |x|$. По

Даламберовом критеријуму следи да дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. Како је $a_n \sim \frac{4}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, за $x = 1$ дивергира и дати ред (поредбени критеријум за позитивне редове). Како је дати низ монотонно опадајући и тежи ка нули, за $x = -1$ дати ред конвергира (Лајбницов критеријум).

28. Нека је $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ за $n \geq 1$.

(а) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n}(a_{n+1} - a_n))$.

(б) Испитати конвергенцију низа $(a_n)_{n \geq 1}$.

(в) Одредити све реалне бројеве x за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Решење. (а) Како $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \cdot \sqrt{n+1} + 2 \cdot \sqrt{n} = \frac{-2n - 1 + 2 \cdot \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-2n - 1 + 2n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2n - 1 + 2n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + \left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$. Следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (n\sqrt{n}(a_{n+1} - a_n)) = -\frac{1}{4}$.

(б) Како је $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} > \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, следи да је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ опадајући низ $(a_1 = -1)$ негативних бројева. Како је $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$ и последњи ред (по (а)) конвергира, он је и ограничен, па конвергира (ка неком $\alpha < 0$).

(в) За $x \neq 0$ важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| \cdot \frac{|\alpha|}{|\alpha|} = |x|$, па по Даламберовом критеријуму дати ред конвергира за $|x| < 1$ и дивергира за $|x| > 1$. Како, по (б), важи $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha| \neq 0$, за $x = \pm 1$ општи члан датог реда не тежи ка нули, па ред дивергира.

29. Нека је $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1+n}} - \frac{1}{2} + \frac{c}{n}$ за $n \in \mathbb{N}$. Одредити $c \in \mathbb{R}$ тако да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

Решење. Пошто је

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1+n}} &= \sqrt{n^2+n+1} - n = n \left(\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \\ &= n \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^2} + \frac{\alpha}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Следи $a_n = \frac{3}{8n} + \frac{c}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, па за $c \neq -\frac{3}{8}$ дати ред дивергира (поредбени критеријум, из последње релације се види да је за овакво c дати ред константног знака почев од неког члана), а за $c = -\frac{3}{8}$ важи $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, па дати ред конвергира (чак апсолутно—опет поредбени критеријум).

30. Нека је $c > 0$, $a_n = x\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k+c})$ за $n \in \mathbb{N}$. За које $x \in \mathbb{R}$ конвергира

(а) низ $(n(a_{n+1} - a_n))_{n \geq 1}$; (б) низ $(a_n)_{n \geq 1}$?

Решење. Пошто важи

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= x\sqrt{n+1} - x\sqrt{n} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1+c} \\ &= \sqrt{n} \left[(x+1) \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) - x \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1+c}{2n} - \frac{(1+c)^2}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{n} \left(\frac{x-c}{2n} + \frac{2c+c^2-x}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\
&= \frac{x-c}{2\sqrt{n}} + \frac{2c+c^2-x}{8n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right), \text{ следи:}
\end{aligned}$$

(а) $n(a_{n+1} - a_n) = \frac{x-c}{2} \cdot \sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, па низ $(n(a_{n+1} - a_n))_{n \geq 1}$ дивергира за $x \neq c$. За $x = c$ је $n(a_{n+1} - a_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, па дати низ конвергира.

(б) како је $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$, за $x \neq c$, низ $(a_n)_{n \geq 1}$ дивергира (јер дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$), а за $x = c$ конвергира (јер конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ и $c > 0$, па је $c \notin \{-1, 0\}$) (из асимптотског понашања следи и да је низ $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq 1}$ за $x \neq c$ почев од неког тренутка константног знака).

31. Нека је $c_n > 0$ и $c_{n+7} = c_n$ за $n \geq 1$. Одредити све реалне бројеве α и x за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n^\alpha}$.

Решење. Нека је $M = \max\{c_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{c_n x^n}{n^\alpha} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{M} \cdot |x|}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = |x|$, по Кошијевом кореном тесту следи да дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = \pm 1$ и $\alpha \leq 0$ општи члан не тежи нули, па ред дивергира. Ако је $\alpha > 1$, општи члан реда је (по апсолутној вредности) мањи од $\frac{M}{n^\alpha}$, па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^\alpha}$ конвергира, апсолутно конвергира и дати ред.

За $x = 1$ и $0 < \alpha \leq 1$, како дивергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{7n}}{7n} = \left(\frac{c_{7n}}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$, дивергира и дати ред (парцијална сума првих $7n$ чланова реда датог у задатку је већа од парцијалне суме првих n чланова претходног реда). Слично, за $x = -1$ и $0 < \alpha \leq 1$ је свака парцијална сума датог реда збир одговарајућих парцијалних сума редова $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{7n+k} c_k}{(7n+k)^\alpha} = c_k \cdot (-1)^k$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(7n+k)^\alpha}$, који по Лајбницевог критеријуму конвергирају, па и он конвергира.

32. Нека је $x_1 \in (0, 1)$ и $x_{n+1} = \sqrt{x_n(2-x_n)}$ за $n \in \mathbb{N}$.

- (а) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (б) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)^2}{1-x_{n+1}}$.
- (в) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_{n+1}}{(1-x_n)(1-x_{n-1}) \cdots (1-x_1)}$.
- (г) Да ли је скуп $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ затворен?

Решење. Ако је $x_n \in (0, 1)$, следи $0 < \sqrt{2x_n - x_n^2} = \sqrt{1 - (1-x_n)^2} < 1$, па индукцијом следи да је низ ограничен ($x_1 \in (0, 1)$).

Како за $x_n \in (0, 1)$ важи $x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \sqrt{2x_n - x_n^2} > x_n \Leftrightarrow x_n(2-x_n) > x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n(1-x_n) > 0$, и последње је тачно ($x_n \in (0, 1)$), следи да је дати низ и неопадајући. Следи да је конвергентан, па, ако је $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, пуштањем граничне вредности у релацију којом је дефинисан низ, добија се $x = \sqrt{x(2-x)}$, одакле је $x \in \{0, 1\}$. Како је низ растући низ позитивних бројева, следи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

(б) Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, следи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)^2}{1-x_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)^2}{1-\sqrt{2x_n-x_n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)^2}{1-\sqrt{2x_n-x_n^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2x_n-x_n^2}}{1+\sqrt{2x_n-x_n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x_n)^2 \cdot (1+\sqrt{2x_n-x_n^2})}{1-2x_n+x_n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\sqrt{2x_n-x_n^2}\right) = 2. \end{aligned}$$

(в) Како је $\frac{1-x_{n+1}}{(1-x_n)(1-x_{n-1}) \cdots (1-x_1)} = \frac{1-x_{n+1}}{(1-x_n)^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ кад $n \rightarrow \infty$ (по (б)), по Даламберовом критеријуму следи да дати ред конвергира.

(г) Скуп није затворен, јер не садржи тачку 1, која му је тачка нагомилавања.

33. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) \cdot q^n$, за $q \in \mathbb{R}$.

Решење. Како важи $\left|e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right| \sim \frac{1}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) \cdot q^n$ апсолутно конвергира ако и само ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|q|^n}{n}$ (поредбени критеријум за позитивне редове). Последњи

ред конвергира за $|q| < 1$, а дивергира за $|q| \geq 1$ (за $q = 0$ ред конвергира; како је $\frac{|q|^{n+1}}{\frac{|q|^n}{n}} = |q| \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow |q|$, кад $n \rightarrow \infty$, тврђење за $|q| \neq 1$ следи из Даламберовог критеријума; за $|q| = 1$ добија се ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, који дивергира).

За $q = -1$ дати ред је са позитивним члановима ($e^x > 1 \Leftrightarrow x > 1$, $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 1$), па по претходном дивергира. Слично, за $q = 1$ важи $e^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1 = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, па дати ред конвергира, јер ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

конвергира по Лајбницовом критеријуму (низ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ монотono тежи нули), а остатак апсолутно конвергира.

Дакле, дати ред конвергира ако и само ако је $-1 < q \leq 1$.

34. У зависности од реалних параметара α и x испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n-1} \cdot x^n$.

Решење. Како је (за $x \neq 0$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{n} \cdot x^{n+1}}{\frac{n^\alpha}{n-1} \cdot x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right) \right] = |x|$, по Даламберовом критеријуму следи да дати ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

За $x = 1$ дати ред је ред са позитивним члановима, па из $\frac{n^\alpha}{n-1} \sim n^{\alpha-1}$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да дати ред конвергира ако и само ако је $\alpha < 0$.

За $x = -1$ из претходног следи да ред апсолутно конвергира за $\alpha < 0$, а дивергира за $\alpha \geq 1$ (општи члан реда не тажи нули).

За $0 \leq \alpha < 1$ (и $x = -1$) из конвергенције реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$ (Лајбницов критеријум, низ $\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)_{n \geq 2}$ монотono опада ка нули) и $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n^\alpha}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}} \right)$ се добија да дати ред конвергира (Абелов критеријум, јер је низ $\left(\frac{n}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ монотон и ограничен).

Напомена. Уочени ред је степени, са центром у нули. По Коши-Адамаровој формули, радијус конвергенције реда је $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^\alpha}{n-1}}} = 1$, па се и овако могло закључити да ред конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$.

35. Испитати конвергенцију $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)(n+3)} \cdot x^n$.

Решење. Уочени ред је степени, са центром у нули. По Коши-Адамаровој формули, радијус конвергенције реда је $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)}}} = 1$, па конвергира за $|x| < 1$, а дивергира за $|x| > 1$. За $x \in \{-1, 1\}$ важи $|\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)} \cdot x^n| \sim \frac{1}{n^2}$ кад $n \rightarrow \infty$, па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, следи да уочени ред конвергира за $x \in [-1, 1]$.

36. Испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$.

Решење. За $p = 0$ дати ред није добро дефинисан (долази до дељења нулом). За $p < 0$ је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = 1$, па ред дивергира.

За $p > 0$ општи члан тежи нули и ред је алтернирајући ($n^p > 1$ за $n \geq 2$), па како је $\frac{1}{n^p + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^p}$ кад $n \rightarrow \infty$, дати ред апсолутно конвергира ако и само ако је $p > 1$. Следи да за $p > 1$ он конвергира и обично.

За $0 < p < 1$, како је $\frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} \cdot \frac{n^p - (-1)^n}{n^p - (-1)^n} = \frac{(-1)^n n^p + 1}{n^{2p} - 1}$ и како ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p} - 1}$ конвергира (на основу Лајбницевог критеријума), а ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p} - 1}$ конвергира ако и само ако је $p > \frac{1}{2}$, следи да дати ред конвергира за $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, а дивергира за $p \in (0, \frac{1}{2}]$.

37. У зависности од $p \in \mathbb{R}$ испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$. Како $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})$ кад $n \rightarrow \infty$. Следи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (чак и монотono, почев од неког n), па је $|a_n| = a_n = \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n^p}$ кад $n \rightarrow \infty$.

Дакле, ако је $p \leq 0$ ред дивергира (општи члан му не тежи нули).

Ако је $p > 1$ ред апсолутно конвергира, јер конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (поредбени критеријум за позитивне редове). Аналогно, за $0 < p \leq 1$

ред не конвергира апсолутно. Ипак, како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ конвергира

(Лајбницов критеријум, низ $(\frac{1}{n^p})_{n \geq 1}$ монотono тежи ка нули) и како

је низ $(\frac{1}{\sqrt[n]{n}})_{n \geq 1}$ конвергентан и, почев од неког n , монотон (може се

показати да се то дешава почев од трећег члана), дати ред конвергира

(Абелов критеријум).

38. У зависности од реалног параметра p , испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$ за $n \in \mathbb{N}$ (низ $(a_n)_{n \geq 1}$ је низ позитивних бројева). Онда је

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\frac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} = \frac{1}{e} \cdot e^{(n+p) \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})} \\ &= e^{-1 + (n+p) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)} = e^{\frac{p-1}{n} + \frac{1}{2} \frac{p-1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 1 + \frac{p-1}{n} + \frac{\frac{1}{2} \frac{p-1}{n^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ кад } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из Гаусовог критеријума следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира за $p > \frac{3}{2}$, а дивергира за $p \leq \frac{3}{2}$ (тј. ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ апсолутно конвергира за $p > \frac{3}{2}$).

За $p < \frac{1}{2}$ следи $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p-1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) < 1$ почев од неког $n_0 \in \mathbb{N}$, па је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ растући почев од неког члана, тј. ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ дивергира, јер му општи члан не тежи нули. Слично, за $p > \frac{1}{2}$ низ $(a_n)_{n \geq 1}$ је опадајући почев од неког члана. За $p = \frac{1}{2}$ следи $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1$ почев од неког $n_0 \in \mathbb{N}$, па је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ и у овом случају опадајући почев од неког члана. Дакле, низ $\left(\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)_{n \geq 1}$ је ограничен (тј. постоји $M \in \mathbb{R}$, тако да важи $\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} < M$ за свако $n \in \mathbb{N}$), па за свако $p > \frac{1}{2}$ важи $\frac{n! e^n}{n^{n+p}} = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}} < \frac{M}{n^{p-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$. Следи да за $p > \frac{1}{2}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира по Лајбницевог критеријуму (тј. за $\frac{1}{2} < p \leq \frac{3}{2}$ дати ред конвергира условно).

Из $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \sim \frac{1}{12n^2}$ кад $n \rightarrow \infty$ следи $\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \sim -\frac{1}{12n^2}$ кад $n \rightarrow \infty$, па за неко n_0 важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{6n^2}$ за $n \geq n_0$. Следи да за $n \geq n_0$ важи $a_{n+1} \geq a_{n_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6(n-1)^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{6n_0^2}\right) > C > 0$ за неко C , јер $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира.

Следи да општи члан датог реда не конвергира нули ни за $p = \frac{1}{2}$, па и за ову вредност параметра он дивергира.

Напомена. Претходни задатак се може лакше урадити ако се искористи $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ кад $n \rightarrow \infty$ (Стирлингова формула).

39. У зависности од реалног параметра α испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{n^\alpha \cdot (2n)!}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{n^\alpha \cdot (2n)!}$ ($a_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$). Тада важи

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{2(n+1)}}{(n+1)^\alpha \cdot (2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{n^\alpha \cdot (2n)!}} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^2 \cdot n^\alpha}{(n+1)^\alpha \cdot (2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{2n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{2} - \alpha}{n} + \frac{2\alpha^2 - 1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \text{ кад } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

На основу Гаусовог критеријума, следи да уочени ред апсолутно конвергира ако и само ако је $\frac{1}{2} - \alpha < -1$, односно, ако и само ако је $\alpha > \frac{3}{2}$. Из претходног следи и да постоји n_0 , тако да је $a_{n+1} > a_n$, за $n \geq n_0$, ако је $p < \frac{1}{2}$, па у овом случају уочени ред дивергира (општи члан реда не тежи ка 0). Аналогно, ако је $\frac{3}{2} \geq \alpha > \frac{1}{2}$, онда из претходног следи да чланови низа $(a_n)_{n \geq 1}$ теже ка 0, и то монотонно почев од неког члана, те следи конвергенција наведеног реда (дакле, у овом случају је конвергенција условна (ред конвергира, али не и апсолутно)). Коначно, ако је $\alpha = \frac{1}{2}$, важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, кад $n \rightarrow \infty$, те је $a_{n+1} > a_n$ за довољно велико n , тј. и у овом случају уочени ред дивергира (општи члан не тежи ка 0).

40. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}} > 0$. Како је

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}}{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 \cdot 2^{2n+2}}} = \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 1 + \frac{1}{2n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{2n} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

кад $n \rightarrow \infty$, по Гаусовом критеријуму следи да ред апсолутно не конвергира (јер је $\frac{1}{2} < 1$) и да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (за $n > n_0$ је $a_{n+1} < a_n \cdot \frac{1}{4n}$, па је $a_{n+1} < a_{n_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{4n_0}\right)$, па како ред $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира,

слиди $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$). Такође, одозго слиди да за довољно велико n важи $a_{n+1} < a_n$, па дати ред конвергира по Лајбницовом критеријуму.

41. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n^n n!}{(2n)!}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{a^n n^n n!}{(2n)!}$ за $n \geq 1$. За $a \neq 0$ је

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{\frac{|a|^n n^n n!}{(2n)!}}{\frac{|a|^{n+1} (n+1)^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!}} = \frac{2(2n+1)}{|a|(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= \frac{4}{|a|} \cdot e^{-n \cdot \ln(1 + \frac{1}{n})} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1} \\ &= \frac{4}{|a|e} \cdot e^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{4}{|a|e} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{5}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{4}{|a|e} \cdot \left(1 + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Дакле, за $|a| < \frac{4}{e}$ је $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > 1$, па по Даламберовом критеријуму дати ред конвергира. Слично, за $|a| > \frac{4}{e}$ је $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1$, па по Даламберовом критеријуму дати ред дивергира.

За $|a| = \frac{4}{e}$ је $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, па за неко $c > 0$ и неко $m \in \mathbb{N}$ важи $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 - \frac{c}{n^2}$, за $n \geq m$, одакле је

$$|a_n| = |a_m| \cdot \left(1 - \frac{c}{(n-1)^2} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{c}{m^2} \right) > |a_m| \cdot e^{-\frac{c}{(n-1)^2} - \dots - \frac{c}{m^2}} > 0$$

за свако $n > m$ (јер је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан). Следи да $|a_n|$ не тежи нули кад $n \rightarrow \infty$, па у овом случају дати ред дивергира.

42. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi(\sqrt{n^2+n}+n))}{\sqrt{n}}$.

Решење. Како је $\sqrt{n^2+n}+n = n \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) = n \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \right) = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \left(\frac{1}{n} \right)$ кад $n \rightarrow \infty$, слиди да је $\cos(\pi(\sqrt{n^2+n}+n)) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ кад $n \rightarrow \infty$. Дакле, дати ред је почев од неког члана са ненегативним члановима, па је, по поредбеном критеријуму, еквиконвергентан са $\frac{\pi}{8n^{\frac{3}{2}}}$, тј. конвергира.

43. У зависности од параметара $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$.

Решење. Решење неједначине $|\sin \alpha| < \sin \frac{1}{2}$ је $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{1}{2}, k\pi + \frac{1}{2}\right)$. Дакле, то је унија интервала дужине један, а растојање између два узастопна интервала је $\pi - 1 > 1$, па је бар један од $|\sin n|, |\sin(n+1)|$ не мањи од $\sin \frac{1}{2}$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Низ $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\right)_{n \geq 1}$ је монотон и тежи ка e . Специјално, он је ограничен.

Ако је $\alpha \leq 0$, по претходном следи да општи члан не тежи нули, па дати ред дивергира. Ако је $\alpha > 1$, онда је $\left|\frac{\sin n}{n^{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\right| \leq \frac{C}{n^{\alpha}}$, за неко $C \in \mathbb{R}$, па конвергира апсолутно (самим тим и обично).

Ако је $0 < \alpha \leq 1$, по претходном разматрању, од $|\sin n|, |\sin(n+1)|$ је бар један не мањи од $\sin \frac{1}{2}$, па је за довољно велико n бар један од $\left|\frac{\sin 2n-1}{(2n-1)^{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1+\beta}\right|$ и $\left|\frac{\sin 2n}{(2n)^{\alpha}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+\beta}\right|$ не већи од $\frac{e \cdot \sin \frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{(2n)^{\alpha}}$, па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{\alpha}}$ дивергира, апсолутно дивергира и дати ред.

За $0 < \alpha \leq 1$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$ конвергира (Дирихлеов критеријум, низ $\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n \geq 1}$ је ограничене варијације (монотонно тежи ка нули), а како је $\left|\sum_{n=1}^N \sin n\right| = \left|\frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{n+1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}|}$, низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ је ограничен). Следи да дати ред конвергира (испуњава услове Абеловог критеријума—низ $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\beta}\right)_{n \geq 1}$ је ограничене варијације (монотон је и ограничен), а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^{\alpha}}$ конвергира).

44. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n^2}$.

Решење. Низ $\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ монотонно тежи нули, па, по Лајбницовом критеријуму, ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ конвергира. Како је низ $\left(\cos \frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ ограничене варијације (монотон је и ограничен), по Абеловом критеријуму следи и конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{1}{n^2}$.

45. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}}$.

Решење. Низ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ монотонно тежи нули, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конвергира по Лајбницовом критеријуму. Како је низ $(e^{-\frac{1}{n}})_{n \geq 1}$ ограничене варијације (монотон је и ограничен), по Абеловом критеријуму следи и конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}}$.

Како је $\frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{n}$ кад $n \rightarrow \infty$, то ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}}$ дивергира по поредбеном критеријуму за позитивне редове, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}}$ не конвергира апсолутно.

46. Испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n \cos n \operatorname{arctg}\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln^2 n}.$$

Решење. Ред је добро дефинисан. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n}{\ln^2 n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{\ln^2 n}$ конвергира по Дирихлеовом критеријуму, пошто је низ $\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right)_{n \geq 2}$ монотон и тежи ка 0, а ред $\left|\sum_{n=1}^m \sin 2n\right| = \frac{|1 - \cos(2m+2)|}{2|\sin 2|} \leq \frac{1}{|\sin 2|}$ има ограничене парцијалне суме, па као је низ $\left(\operatorname{arctg}\left(n + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 2}$ монотон и ограничен, дати ред конвергира по Абеловом критеријуму.

47. У зависности од реалних параметара a и b испитати обичну и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin an}{n^b}$.

Решење. Због 2π -периодичности функције $\sin x$, без умањења опшности, може се посматрати $a \in (-\pi, \pi)$ (дати ред конвергира за неке a и b ако и само ако конвергира одговарајући ред за $a + 2k\pi$ и b , $k \in \mathbb{Z}$). Слично, због непарности функције $\sin x$, резултат који се добије за неко a и b је истоветан и за $-a$ и b , па је довољно размотрити $a \in [0, \pi)$. За $a = 0$ дати ред конвергира за свако b (сви чланови су му 0).

Нека је $a \in (0, \pi)$. За свако n , међу бројевима $\sin n$, $\sin(n+1)$, $\sin(n+2)$ и $\sin(n+3)$ постоје бар два који су по апсолутној вредности не мањи од $\sin \frac{\pi-3}{2}$. Заиста, решење неједначине $|\sin x| < \sin \frac{\pi-3}{2}$ је $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi - \frac{\pi-3}{2}, k\pi + \frac{\pi-3}{2}\right)$, односно унија интервала дужине $2 \sin \frac{\pi-3}{2} <$

$2 \cdot \frac{\pi-3}{2} = \pi - 3 < 1$, а растојање између интервала који одговарају узастопним целим бројевима је $\pi - 2 \cdot \frac{\pi-3}{2} = 3$. Ако је то није $\sin(n+2)$, тада је из истих разлога $\sin(n+3)$. Дакле, међу $\sin n$, $\sin(n+1)$, $\sin(n+2)$ и $\sin(n+3)$ постоје бар два узастопна, који су по апсолутној вредности не мањи од $\sin \frac{\pi-3}{2}$.

Слично се показује међу $\sin an$ и $\sin a(n+1)$ постоји бар један који је по апсолутној вредности не мањи од $\min \left\{ \sin \frac{a}{2}, \sin \frac{\pi-a}{2} \right\}$ (решење одговарајуће неједначине је унија интервала дужина $\min \{a, \pi - a\} \leq a$, а растојање између „узастопних” је $\pi - \min \{a, \pi - a\} = \max \{\pi - a, a\} \geq a$).

Из претходног следи да општи члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \sin an$ за $a \in (0, \pi)$ не тежи нули (и аналогно за дати ред и $b \leq 0$), па у овом случају дати ред дивергира.

Ако је $a \in (0, \pi)$ и $b \in (0, 1]$, по претходном следи да за свако $k \in \mathbb{N}_0$ важи $\sum_{i=4k+1}^{4k+4} \frac{|\sin n \sin an|}{n^b} \geq \frac{C}{(4k+4)^b}$ (где је $C = \frac{\pi-3}{2} \cdot \min \left\{ \sin \frac{a}{2}, \sin \frac{\pi-a}{2} \right\}$),

па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$ дивергира, за ове вредности параметара и дати ред апсолутно дивергира.

За $a \in (0, \pi)$ и $b > 1$ важи $\frac{|\sin n \sin an|}{n^b} \leq \frac{1}{n^b}$, па како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$ конвергира, апсолутно конвергира и дати ред.

За $a \in (0, \pi)$ и $b \in (0, 1]$, како је $\sin n \sin an = \frac{\cos((1-a)n) - \cos((1+a)n)}{2}$, следи:

(1) ако је $a \neq 1$, онда је $\sin \frac{1-a}{2} \neq 0$ и $\sin \frac{1+a}{2} \neq 0$, па је

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^k \cos((1-a)n) \right| &= \left| \frac{2 \sin \frac{1-a}{2}}{2 \sin \frac{1-a}{2}} \cdot \sum_{n=1}^k \cos((1-a)n) \right| \\ &= \left| \frac{-\sin \frac{1-a}{2} + \sin \frac{(1-a)(2k+1)}{2}}{2 \sin \frac{1-a}{2}} \right| \leq \frac{2}{2 \cdot \left| \sin \frac{1-a}{2} \right|} \end{aligned}$$

и, слично, $\left| \sum_{n=1}^k \cos((1+a)n) \right| \leq \frac{2}{2 \cdot \left| \sin \frac{1+a}{2} \right|}$. Како низ $\left(\frac{1}{n^b} \right)_{n \geq 1}$

монотонно тажи нули, по Дирихлеовом критеријуму конвергирају $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((1-a)n)}{n^b}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((1+a)n)}{n^b}$, па конвергира и дати ред;

(2) ако је $a = 1$, као и у (1) следи да конвергира $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n^b}$, а како

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$ дивергира, следи да дивергира и дати ред.

48. Нека су $(a_n)_{n \geq 1}$ и $(b_n)_{n \geq 1}$ монотono опадајући низови реалних бројева и нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n}$.

Решење. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$. Како је низ $(a_n)_{n \geq 1}$ опадајући, следи да у $\mathbb{R}$ постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (тј. или низ $(a_n)_{n \geq 1}$ конвергира ка неком $a \in \mathbb{R}$ или тежи ка $-\infty$).

Следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{a_n}{b_n} \right| = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$, па је гранична вредност датог количника једнака количнику граничних вредности). Следи да за $a \neq 0$ дати ред дивергира, јер општи члан не тежи нули.

Ако је $a = 0$ дати ред конвергира по Дирихлеовом критеријуму, јер низ $(a_n)_{n \geq 1}$ монотono тежи ка нули, а низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{b_n}$ је ограничен, пошто је $\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{b_n} = -\frac{1}{b_1} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{b_{2n}} - \frac{1}{b_{2n+1}} \right) + \frac{1}{b_{2n}} < -\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_{2n}} < \frac{1}{b_{2n}} < \frac{1}{b}$ и $\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^n}{b_n} = \sum_{n=1}^k \left(-\frac{1}{b_{2n-1}} + \frac{1}{b_{2n}} \right) > 0$ ($0 < b < b_n < b_m$ за $n < m$), а слично се доказује да је и $-\frac{1}{b} < \sum_{n=1}^{2k+1} \frac{(-1)^n}{b_n} < 0$.

49. Нека је $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која је диференцијабилна у интервалу $(0, 1)$. Ако је први извод функције f ограничен на $(0, 1)$, $(x_n)_{n \geq 1}$ низ реалних бројева из $[0, 1]$ и $x \in [0, 1]$, доказати да из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|$ следи конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x)|$.

Решење. Нека је M реалан број такав да важи $|f'(x)| \leq M$ за свако $x \in (0, 1)$. Тада на основу Лагранжове теореме о средњој вредности следи да за свако $x_n \in (0, 1)$ постоји $c_n \in (0, x_n)$ такво да је $|f(x_n) - f(x)| = |f'(c_n) \cdot (x_n - x)| \leq M|x_n - x|$. Према томе, ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x|$ конвергира, на основу поредбеног критеријума следи да конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n) - f(x)|$.

50. Ако је $\beta(n)$ број цифара у бинарном запису природног броја n испитати конвергенцију редова:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta(n)}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\beta(n)}; \quad (v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\beta(n))^2}.$$

Решење. Ако је $2^{k-1} < n \leq 2^k$, за $k, n \in \mathbb{N}$, следи да број n има k цифара у бинарном запису, тј. $\beta(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Низ $(\beta(n))_{n \geq 1}$ је неопадајући,

па ред из (а) конвергира по Лајбницеовом критеријуму. Редови из (б) и (в) су са позитивним члановима, па како је $\frac{1}{n\beta(n)} \geq \frac{1}{n(\log_2 n + 1)}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n + 1)}$ дивергира, следи дивергенција реда из (б), а како је $\frac{1}{n(\beta(n))^2} \leq \frac{1}{n \log_2^2 n}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log_2^2 n}$ конвергира, следи конвергенција реда из (в).

51. Нека је низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}}$ конвергентан и одредити му збир.

Решење. Индукцијом следи да је $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\alpha^n - \beta^n)$ за $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (у питању је Фибоначијев низ). Како по Виетовим правилима важи $\alpha + \beta = 1$ и $\alpha\beta = -1$, следи да за $n \geq 1$ важи $\frac{1}{f_{2^n}} = \frac{\sqrt{5}}{\alpha^{2^n} - \beta^{2^n}} = \frac{\sqrt{5}\alpha^{2^n}}{\alpha^{2^{n+1}} - 1} = \frac{\sqrt{5}(\alpha^{2^n} - 1 + 1)}{(\alpha^{2^n} - 1)(\alpha^{2^n} + 1)} = \sqrt{5} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^{2^n} - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{n+1}} - 1} \right]$, па је n -та парцијална сума овог реда $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{f_{2^k}} = \sqrt{5} \cdot \left[\frac{1}{\alpha^2 - 1} - \frac{1}{\alpha^{2^{n+1}} - 1} \right]$. Како $\frac{1}{\alpha^{2^{n+1}} - 1} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, следи да је дати ред конвергентан и да му је збир једнак $\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\alpha^2 - 1} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$.

52. (а) Одредити константе a, b, c, d и e , тако да важи

$$\ln \frac{\sin x}{x} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + O(|x|^5) \text{ кад } x \rightarrow 0.$$

(б) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3n}{2}}}{n!} \cdot \prod_{\nu=1}^n \sin \frac{\nu}{n\sqrt{n}}$.

Решење. (а) Због парности функције $\ln \frac{\sin x}{x}$ важи $b = d = 0$, а нули је једнак и коефицијент уз x^5 , па је и $O(x^5) = O(|x|^5)$. Како је $\frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \rightarrow 0$ кад $x \rightarrow 0$ и $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ кад $x \rightarrow 0$, следи $\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left[1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) \right] = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} \right)^2 + O(x^6) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(|x|^5)$ (тј. $a = b = d = 0, c = -\frac{1}{6}, e = -\frac{1}{180}$).

(б) По (а) је $\ln \frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} + o(x^3)$ кад $x \rightarrow 0$. Сабирањем датих веза за $x = \frac{\nu}{n\sqrt{n}}$, где је $1 \leq \nu \leq n$, добија се

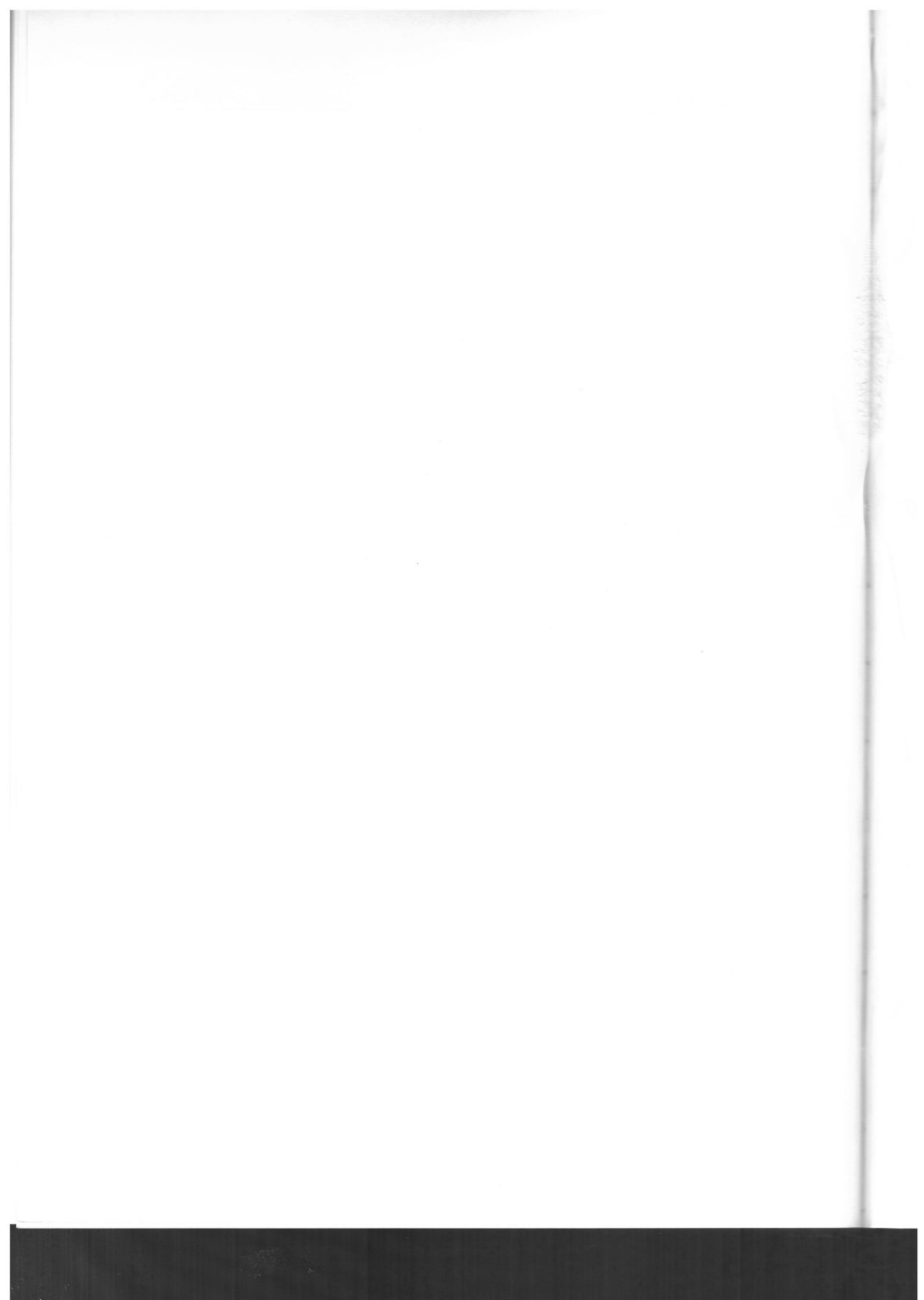
$$\ln \left[\frac{n^{\frac{3n}{2}}}{n!} \cdot \prod_{\nu=1}^n \sin \frac{\nu}{n\sqrt{n}} \right] = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1^2 + \dots + n^2}{n^3} + \left[o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) + \dots + o\left(\frac{n^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right].$$

Како је $\sum_{\nu=1}^n \frac{\nu^3}{n^{\frac{9}{2}}} \leq \frac{n \cdot n^3}{n^{\frac{9}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, следи

$$\ln \left[\frac{n^{\frac{3n}{2}}}{n!} \cdot \prod_{\nu=1}^n \sin \frac{\nu}{n\sqrt{n}} \right] = -\frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

па како је функција e^x непрекидна, следи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3n}{2}}}{n!} \cdot \prod_{\nu=1}^n \sin \frac{\nu}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = e^{-\frac{1}{18}}. \end{aligned}$$





ISBN 978-86-7589-190-1

